

Thème : PRÉVISION :

*Prévision de l'évolution
d'un système et chaos*

Problématique : Peut-on prévoir précisément l'évolution d'un système dans le temps ?

FILIERE PC : ENS (PARIS) – ENS LYON – ENS CACHAN

PAGE DE GARDE DU RAPPORT DE TIPE 2012

NOM : MANGÉAT

Prénoms : Matthieu Claude Julien

Lycée : René CASSIN

Classe : PC

Ville : 64100 BAYONNE

Concours auxquels vous êtes admissible dans la banque inter-ENS :

(Mettre une croix très visible dans la ou les case(s) vous concernant)

ENS Cachan	PC - option Physique ☒	PC - Option Chimie ☐
ENS Lyon	PC ☒	MP - option MPI ☐
ENS (Paris)	PC - option Physique ☒	PC - Option Chimie ☐

Titre du TIPE : Prédiction de l'évolution d'un système et chaos

Nombre de pages (à porter dans les cases ci-dessous) :

Texte	T	39	Illustrations	I	0	Bibliographie	B	1
-------	----------	-----------	---------------	----------	----------	---------------	----------	----------

Résumé imprimé (6 lignes) :

Tout d'abord, j'ai mis en évidence l'existence des systèmes chaotiques, c'est-à-dire des systèmes dont on ne peut pas prévoir l'évolution au cours du temps, avec l'exemple du pendule forcé. Puis, après avoir donné quelques généralités propres au chaos, j'ai étudié deux exemples de systèmes chaotiques, montrant que le chaos touche beaucoup de domaines de la Physique : l'oscillateur de Chua et la convection de Rayleigh-Bénard.

A. Bayonne....., le 18/06/2012
Signature du (de la) candidat(e)

Mangéat

Signature du professeur responsable de
la classe préparatoire dans la discipline

Schampel

Cachet de
l'établissement



Plan :

<i>Introduction</i>	<i>p4</i>
<u><i>I- Mise en évidence des systèmes chaotiques :</i></u>	<i>p5</i>
1) Étude du pendule libre	
2) Étude du pendule forcé	
3) Systèmes déterministes et chaos	
<u><i>II- Application à l'oscillateur de Chua</i></u>	<i>p18</i>
<u><i>III- Application à la convection de Rayleigh-Bénard</i></u>	<i>p29</i>
<i>Conclusion</i>	<i>p37</i>
<i>Bibliographie</i>	<i>p38</i>
<i>Annexe</i>	<i>p39</i>

Introduction :

La prévision de multiples systèmes est nécessaire ou tout simplement voulue dans la vie contemporaine. Par exemple, l'évolution d'un système électrique doit être connue très précisément dans le cadre des machines électroniques (informatique, appareils ménagers, ...) pour éviter les dysfonctionnements pouvant être dangereux. De même, dans d'autres domaines tels que l'économie, la météorologie et la biologie, la prévision a un rôle très important et utile de nos jours.

Or, dans ces domaines la prévision est difficile vu que les systèmes étudiés peuvent être chaotiques. C'est pour cela que j'ai, tout d'abord, montré l'existence de ces systèmes chaotiques en physique avec l'exemple du pendule forcé puis, dans un second temps, j'ai étudié l'oscillateur de Chua, d'une part, et la convection de Rayleigh–Bénard décrivant les mouvements convectifs de l'atmosphère ou du manteau terrestre, d'autre part, pour montrer l'existence du chaos en électricité et en météorologie.

Les divers systèmes (pendule forcé, oscillateur de Chua et convection de Rayleigh–Bénard) ont été étudiés de la manière suivante : tout d'abord, l'établissement des équations – non linéaires – du mouvement à l'aide des théorèmes classiques de mécanique ou d'électronique, puis à l'aide du logiciel informatique MAPLE, une visualisation des solutions de ces équations. Enfin, ces systèmes ont été étudiés de façon expérimentale pour corroborer, du mieux possible, les résultats théoriques en visualisant ces solutions et en obtenant l'attracteur étrange expérimental.

I- Mise en évidence des systèmes chaotiques :

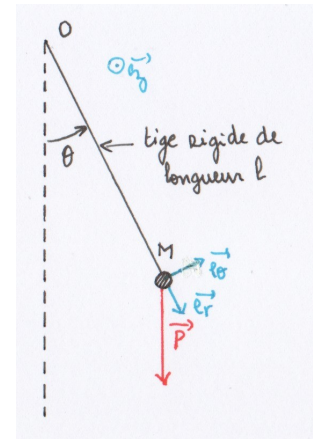
1) Étude du pendule libre :

a) Mise en équation :

Système : {masse M + tige rigide de masse $m \ll M$ }

Référentiel : terrestre supposé galiléen (noté R_t)

Coordonnées : cylindriques ($O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$)



On observe un mouvement de rotation autour de l'axe $\Delta=(O, \mathbf{e}_z)$ et d'angle θ .

Forces extérieures :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- liaison pivot en O supposée parfaite
- frottements fluides négligés

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta=(O, \mathbf{e}_z)$:

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\text{liaison pivot})$$

Calcul du moment cinétique : $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z = Ml^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d\sigma_\Delta}{dt} = Ml^2 \ddot{\theta}$

Calcul des moments des forces :

$$\vec{P} = Mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \Rightarrow M_\Delta(\vec{P}) = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -Mgl \sin \theta$$

$$\text{D'où } Ml^2 \ddot{\theta} + Mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

b) Cas de petites oscillations : $\sin \theta \sim \theta$ et $\theta_0 < 16^\circ$

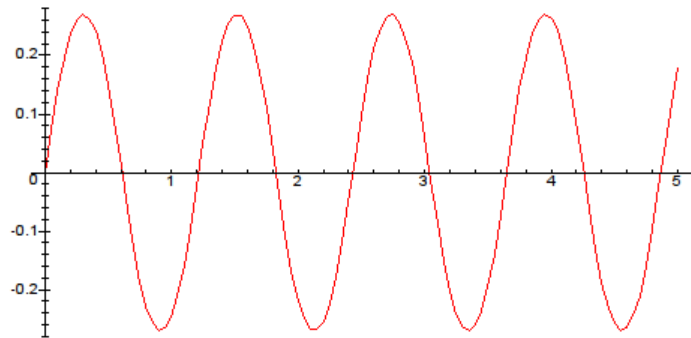
On obtient le système de Cauchy : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$ $\theta(0) = \theta_0$ $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

Solution du système : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

or $\theta(0) = \theta_0 = A$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = B \omega_0$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Courbe représentative de $\theta(t)$:



Pour deux conditions initiales très proches : $\theta_1(0) = \theta_2(0) + \delta \theta_0$ avec $\delta \theta_0 \ll (\theta_1(0), \theta_2(0))$
 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) + \delta \dot{\theta}_0$ avec $\delta \dot{\theta}_0 \ll (\dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0))$

Soit $\Delta \theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$

On obtient : $\Delta \theta(t) = \delta \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\delta \dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Donc, comme $|\cos(\omega_0 t)| \leq 1$ et $|\sin(\omega_0 t)| \leq 1$

$$\Delta \theta(t) \ll (\theta_1(t), \theta_2(t))$$

Donc on peut prévoir l'évolution du système au cours du temps.
 On dit alors que le système est **NON CHAOTIQUE**.

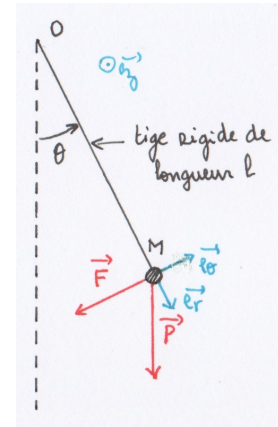
2) Étude du pendule forcé :

a) Mise en équation :

Système : {masse M + tige rigide de masse $m \ll M$ }

Référentiel : terrestre supposé galiléen (noté R_t)

Coordonnées : cylindriques ($O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$)



On observe un mouvement de rotation autour de l'axe $\Delta = (O, \mathbf{e}_z)$ et d'angle θ .

La vitesse de la masse M est donnée par $\vec{v} = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ dans le référentiel terrestre. D'où la vitesse de l'écoulement de l'air au voisinage de la masse est $\vec{v}_e = -l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ dans le référentiel lié à la masse. Soit R_e le nombre de Reynolds de cet écoulement :

$$R_e = \frac{Rv}{\nu} = \frac{Rl\dot{\theta}}{\nu} \quad \text{avec } \nu \text{ la viscosité cinématique de l'air et } R \text{ le rayon de la masse } M.$$

Forces extérieures : - poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

- force de frottement fluide sur la masse (négligée sur la tige) :

- si $R_e \ll 1$, $\vec{F} = -k \vec{v}$ avec $k > 0$

- si $R_e > 1000 - 2000$, $\vec{F} = -k' \nu \vec{v}$ avec $k' > 0$

- liaison pivot en O supposée parfaite

- couple moteur exercé en O : $\vec{C} = \alpha \sin(\omega t) \vec{e}_z$

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta = (O, \mathbf{e}_z)$:

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{F}) + M_\Delta(\text{liaison pivot}) + \vec{C} \cdot \vec{e}_z$$

Calcul du moment cinétique : $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z = Ml^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d\sigma_\Delta}{dt} = Ml^2 \ddot{\theta}$

Calcul des moments des forces :

$$\vec{P} = Mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \Rightarrow M_\Delta(\vec{P}) = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -Mgl \sin \theta$$

$$\vec{F} = -k \vec{v} \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = -kl^2 \dot{\theta}$$

$$\vec{F} = -k' \nu \vec{v} \Rightarrow M_\Delta(\vec{F}) = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = -k' l^3 \dot{\theta}^2$$

D'où $Ml^2 \ddot{\theta} + kl^2 \dot{\theta} + Mgl \sin \theta = \alpha \sin(\omega t)$ si $R_e \ll 1$

$Ml^2 \ddot{\theta} + k' l^3 \dot{\theta}^2 + Mgl \sin \theta = \alpha \sin(\omega t)$ si $R_e > 1000 - 2000$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{M} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{\alpha}{Ml^2} \sin(\omega t) \quad \text{si } R_e \ll 1$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k' l}{M} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{\alpha}{Ml^2} \sin(\omega t) \quad \text{si } R_e > 1000 - 2000$$

b) Cas d'un mouvement dans un écoulement visqueux : $Re \ll 1$

On a l'équation : $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \rho \sin(\omega t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $Q = \frac{M \omega_0}{k}$, $\rho = \frac{\alpha}{M l^2}$

Pour deux conditions initiales très proches : $\theta_1(0) = \theta_2(0) + \delta \theta_0$ avec $\delta \theta_0 \ll (\theta_1(0), \theta_2(0))$
 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) + \delta \dot{\theta}_0$ avec $\delta \dot{\theta}_0 \ll (\dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0))$

D'après la loi de Stokes, $k = 6\pi\eta R$ avec R le rayon de la masse M et η la viscosité dynamique de l'écoulement de l'air.

On utilise une résolution graphique avec MAPLE (méthode Runge Kutta à l'ordre 4).

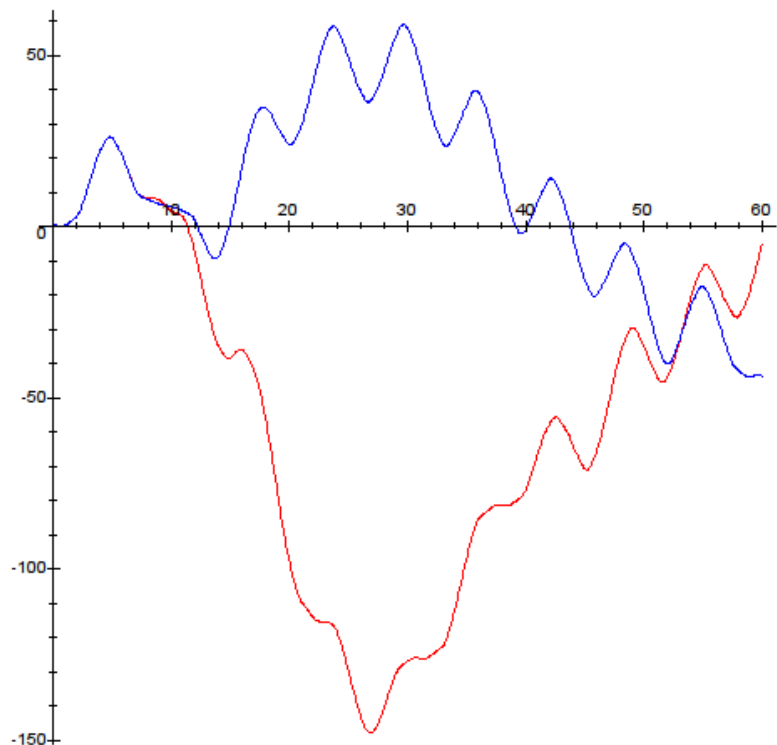
$\eta = 3 \cdot 10^{-5}$ Pl, $R = 2$ cm, $M = 1$ kg, $l = 1$ m, $\rho = 10$ s⁻², $\omega = 1$ rad/s,

$\theta_1(0) = 30^\circ$, $\theta_2(0) = 30,1^\circ$

On obtient les courbes :

$Q = 3,1 \cdot 10^5$
 $\omega_0 = 3,1$ rad/s

--- $\theta_1(t)$
--- $\theta_2(t)$



Pour $t > t_0 = 10$ s : $\Delta \theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ n'est plus négligeable devant $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
Donc on ne peut pas savoir quel sera l'angle à cet instant : cela pourra être $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ ou un angle entre les deux, vu qu'une précision plus petite sur les conditions initiales (3/1000) ne pourra pas être réalisée.

Donc on ne peut pas prévoir l'évolution du système pour un temps grand devant t_0 .

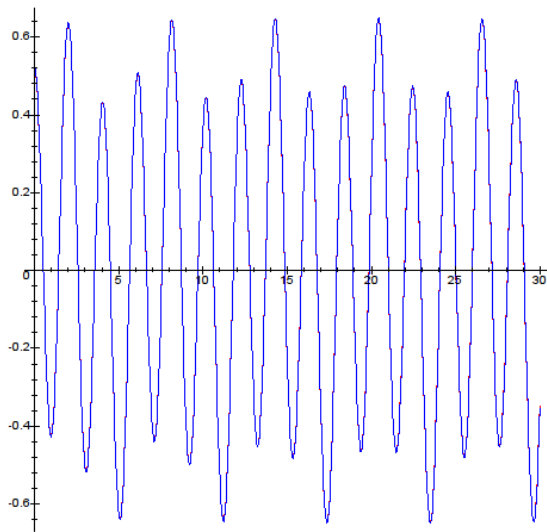
On dit alors que le système est **CHAOTIQUE**.

Paramètre de contrôle : ρ

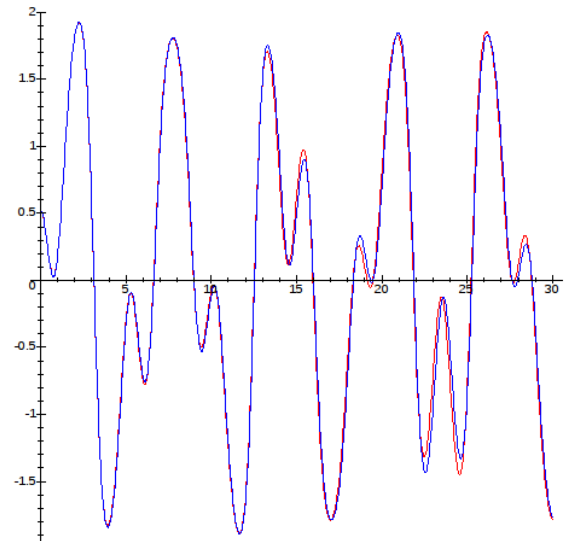
Il existe un réel positif ρ_0 tel que si $\rho_0 < \rho$ alors le système est prévisible (non chaotique). ρ_0 dépend des valeurs de ω_0 , Q , ω ainsi que des conditions initiales. Dans ce cas, le système évolue vers un attracteur périodique fixé par le moteur. ρ est appelé paramètre de contrôle du chaos.

Dans les valeurs précédentes, on obtient (avec --- $\theta_1(t)$; --- $\theta_2(t)$) pour :

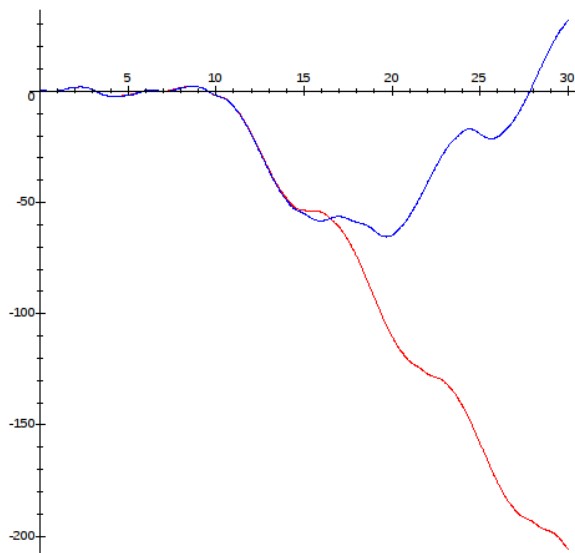
$\rho=1 \text{ s}^{-2}$:



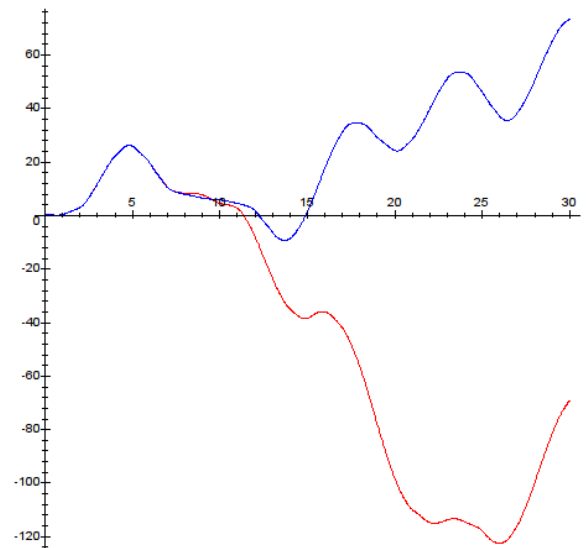
$\rho=7.4 \text{ s}^{-2}$:



$\rho=7.5 \text{ s}^{-2}$:



$\rho=10 \text{ s}^{-2}$:



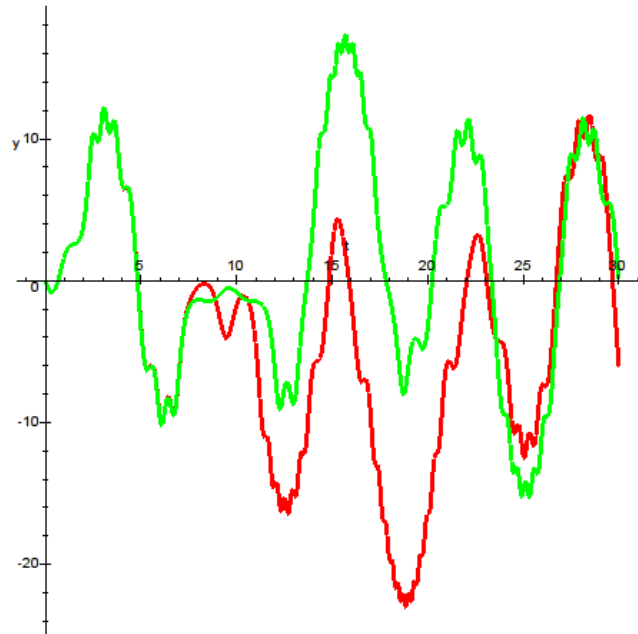
D'où ici ρ_0 est de l'ordre de 7.5 s^{-2} . Il est obtenu de façon empirique.

Allure de la vitesse :

On obtient pour les valeurs précédentes ($\eta=3.10^{-5}$ Pl, $R=2$ cm, $M=1$ kg, $l=1$ m, $\rho=10$ s⁻², $\omega=1$ rad/s, $\theta_1(0)=30^\circ$, $\theta_2(0)=30,1^\circ$) les courbes en $\dot{\theta}$:

--- $\dot{\theta}_1(t)$

--- $\dot{\theta}_2(t)$



D'où $|\dot{\theta}(t)| < 20$ rad/s

Donc $R_{e,max}=2.10^4 > 1000-2000$: à la vitesse maximale de la masse, l'écoulement est turbulent donc $\vec{F} = -k' v \vec{v}$ et non pas $\vec{F} = -k \vec{v}$: le modèle pris en compte ne tient pas compte de la réalité.

c) Cas d'un mouvement dans un écoulement turbulent :

On a l'équation : $\ddot{\theta} + K \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \sin \theta = \rho \sin(\omega t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $K = \frac{k'l}{M}$, $\rho = \frac{\alpha}{Ml^2}$

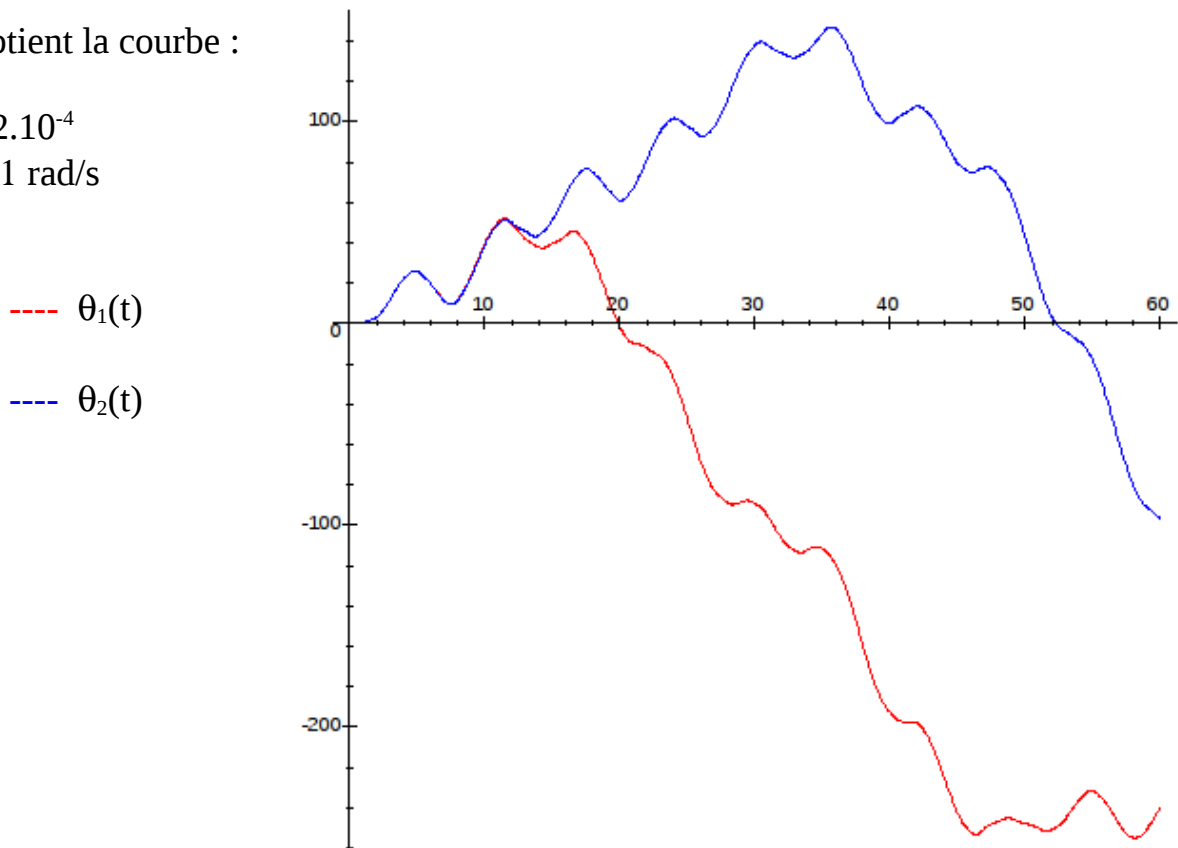
Pour deux conditions initiales très proches : $\theta_1(0) = \theta_2(0) + \delta\theta_0$ avec $\delta\theta_0 \ll (\theta_1(0), \theta_2(0))$
 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) + \delta\dot{\theta}_0$ avec $\delta\dot{\theta}_0 \ll (\dot{\theta}_1(0), \dot{\theta}_2(0))$

Pour un écoulement turbulent ($Re = 10^3 - 10^5$), $k' = \frac{1}{2} C \mu \pi R^2$ avec R le rayon de la masse M, μ la masse volumique de l'air et C le coefficient de traînée ($C = 0,4$ pour une sphère).

On utilise une résolution graphique avec MAPLE (méthode Runge Kutta à l'ordre 4).
 $\mu = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $R = 2 \text{ cm}$, $M = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$, $\rho = 10 \text{ s}^{-2}$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$,
 $\theta_1(0) = 30^\circ$, $\theta_2(0) = 30,1^\circ$

On obtient la courbe :

$K = 3,2 \cdot 10^{-4}$
 $\omega_0 = 3,1 \text{ rad/s}$



Pour $t > t_0 = 14 \text{ s}$: $\Delta \theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ n'est plus négligeable devant $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

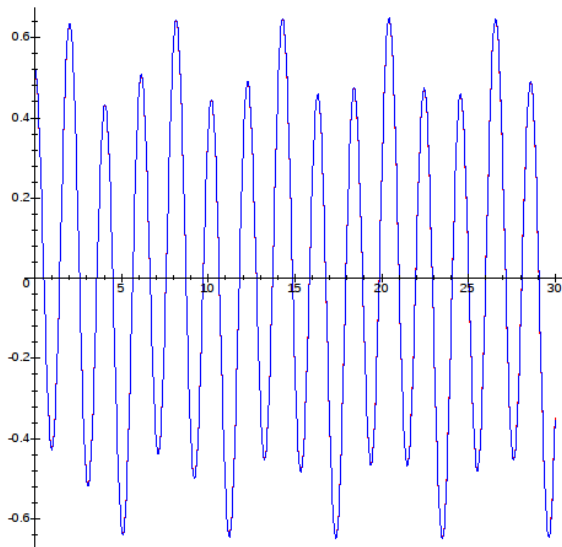
Donc on ne peut pas prévoir l'évolution du système pour un temps grand devant t_0 .

Le système est donc **CHAOTIQUE**.

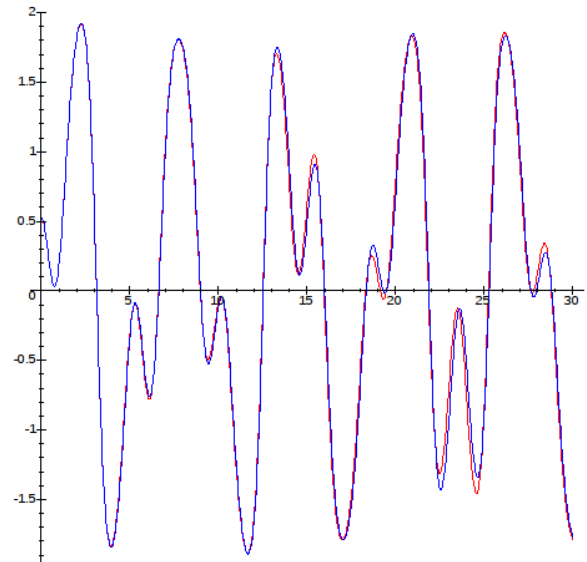
Paramètre de contrôle : ρ

De même que précédemment, ρ est un paramètre de contrôle du chaos. On obtient les courbes suivantes (avec --- $\theta_1(t)$; --- $\theta_2(t)$) pour :

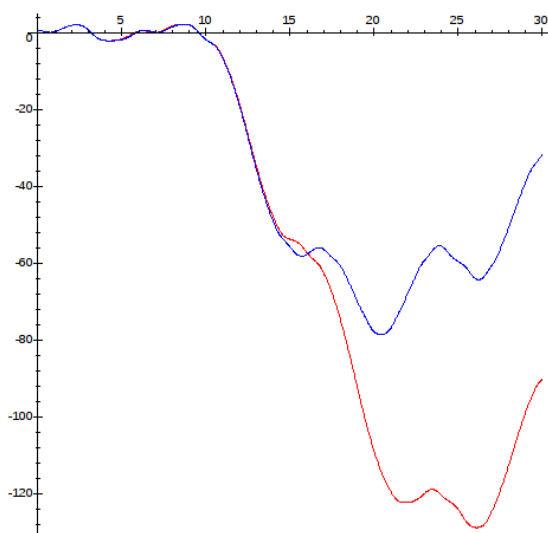
$\rho=1 \text{ s}^{-2}$:



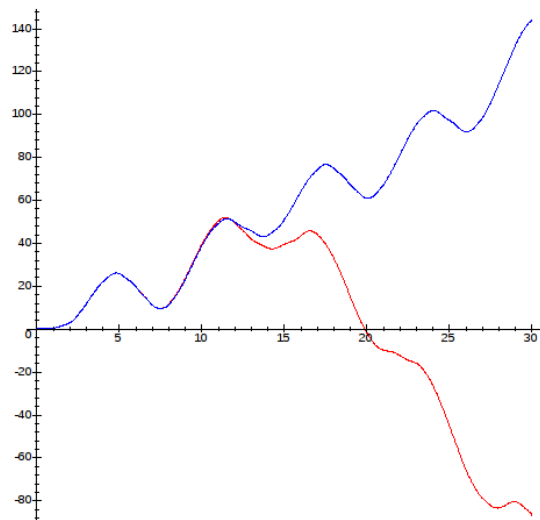
$\rho=7.4 \text{ s}^{-2}$:



$\rho=7.5 \text{ s}^{-2}$:



$\rho=10 \text{ s}^{-2}$:



On obtient également $\rho_0=7.5 \text{ s}^{-2}$.

Allure de la vitesse :

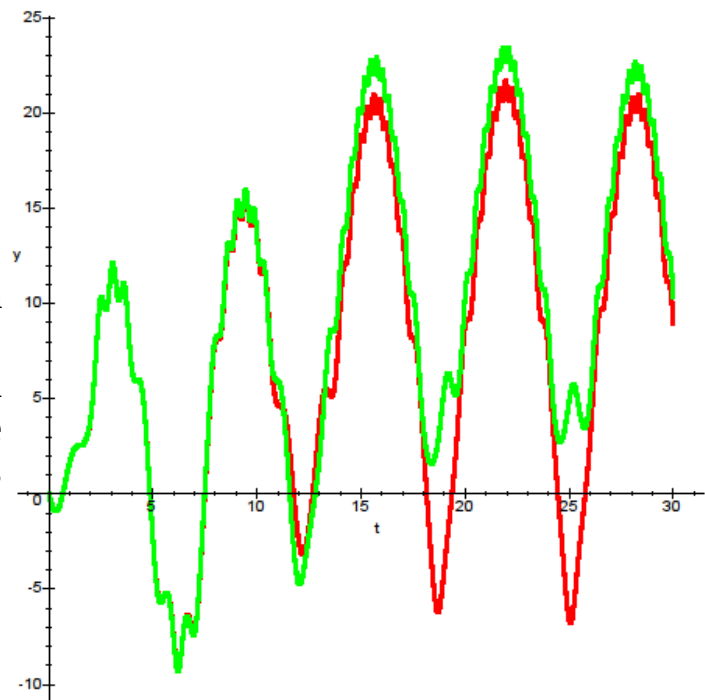
On obtient dans les conditions précédentes ($\mu=1,3\text{kg/m}^3$, $R=2\text{ cm}$, $M=1\text{ kg}$, $l=1\text{ m}$, $\rho=10\text{ s}^{-2}$, $\omega=1\text{ rad/s}$, $\theta_1(0)=30^\circ$, $\theta_2(0)=30,1^\circ$) la courbe en $\dot{\theta}$:

--- $\dot{\theta}_1(t)$

--- $\dot{\theta}_2(t)$

D'où $|\dot{\theta}(t)| < 25\text{ rad/s}$

Donc $R_{e,max}=2.10^4 \gg 1$: à la vitesse maximale de la masse, l'écoulement est turbulent donc on a bien $\vec{F} = -k' \nu \vec{v}$. Le modèle semble donc correcte pour les valeurs prises pour l'étude.

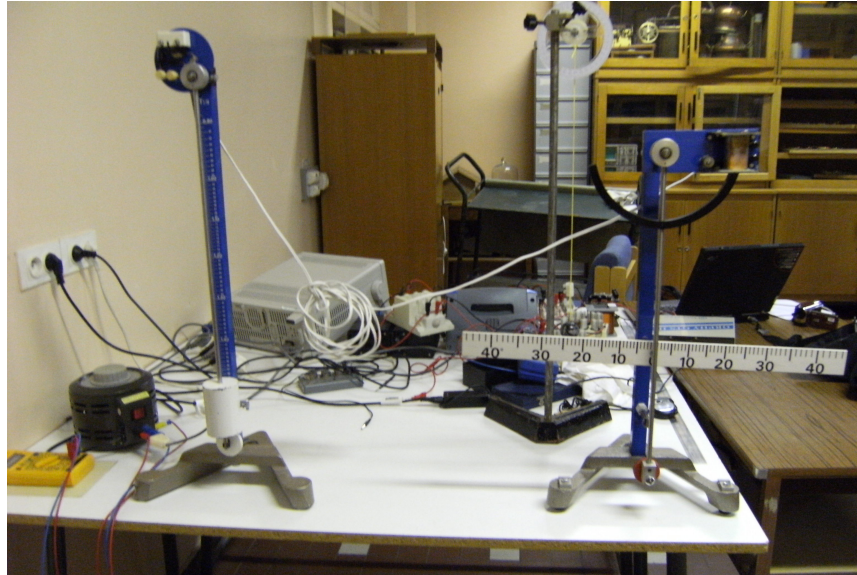


Donc le système pendule forcé est bien chaotique.

d) Résultats expérimentaux :

1- Montage :

On force un pendule pesant à l'aide d'un autre pendule et d'un générateur de tension continue.

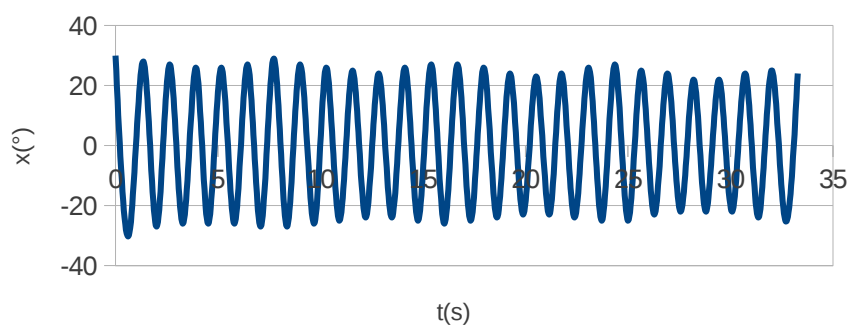


2- Mesures temporelles :

On observe cette même courbe pour cinq relevés différents :

Pendule Forcé

1e série



Période : 0.68s

Le système est donc non chaotique (on se trouve dans le cas où $\rho < 10 \text{ s}^{-2}$). Pour qu'il soit chaotique, il aurait fallu avoir un pendule forcé qui puisse faire des tours complets (impossible ici).

3) Systèmes déterministes et chaos :

a) Repères historiques :

- Antiquité :

En 400 avant Jésus Christ, Pythagore définit le chaos comme « ce qui ne peut s'exprimer sous forme mathématique ».

- XVIe – XVIIe siècle :

De grands scientifiques comme Galilée, Copernic, Kepler, Newton s'intéressent à la mécanique céleste et trouvent des lois régissant le monde. C'est le début de la mécanique déterministe. Kepler trouve trois lois (qui portent son nom) démontrées par Newton à l'aide de la découverte de la force de gravitation en $\frac{1}{r^2}$ et des lois portant son nom, établissant les lois fondamentales de la mécanique classique. Newton établit alors des principes déterministes :

- 1 – Les mêmes causes produisent les mêmes effets.
- 2 – Un système simple possède un comportement simple.
- 3 – Une augmentation de la précision des mesures donne de meilleurs résultats.

- XIXe siècle :

Laplace établit en 1814 que le problème à 3 corps célestes est non chaotique avec une approximation des résultats à l'ordre 1 et établit que « tout phénomène physique est prévisible si l'on connaît ses causes ». C'est une période où le déterminisme est triomphant. Cependant, certaines contradictions apparaissent. Maxwell montre que des imprécisions sur les conditions initiales peuvent faire varier les résultats et montre également la possibilité de l'irréversibilité en thermodynamique. Cela contredit le premier principe de Newton. De plus, Poincaré reprend en 1887 le problème à n corps en mécanique céleste. Il montre que le hasard est présent dans l'univers et démontre en plus la sensibilité aux conditions initiales de certains systèmes tels que le système solaire, qui s'avère à l'inverse de la conclusion de Laplace, chaotique.

En 1892, Lyapounov mesure la divergence entre deux orbites issues de conditions initiales voisines. Il découvre une croissance exponentielle de caractéristique τ : l'horizon de Lyapounov.

- XXe siècle :

Le début du XXe siècle assiste à trois révolutions en physique : la relativité d'Einstein en 1905, la mécanique quantique avec le principe d'Heisenberg en 1926 et le chaos avec Lorenz en 1963, initié par Poincaré en 1887. Dans les années 60-70, le chaos s'impose devant la scène scientifique avec les progrès informatiques permettant la visualisation des résultats mathématiques complexes. Le terme de chaos est alors introduit par Tien-Yien Li et James A. Yorke.

En 1960, Feigenbaum montre les dédoublements de période suivant les caractéristiques du système et donc le contrôle possible de chaos.

En 1963, Lorenz découvre le chaos en météorologie, problème qu'il simplifie à l'aide du modèle de la convection de Rayleigh-Bénard plus facile à résoudre grâce à seulement 3 degrés de liberté. Il met en avant la sensibilité aux conditions initiales qu'il redécouvre avec ses résultats malgré ses approximations. Il introduit alors l'effet papillon.

b) Règles et définitions du chaos :

Un système est CHAOTIQUE si on ne peut pas prévoir son évolution à long terme tout en étant déterministe.

Causes :

Le chaos est dû à la sensibilité aux conditions initiales, causée par des phénomènes non linéaires et la forte récurrence du système.

Evolution de l'imprécision au cours du temps :

$$\Delta x(t) = \Delta x(0) e^{\lambda t}$$

λ est appelé exposant de Lyapunov : il dépend du système étudié et des conditions initiales.

- si $\lambda < 0$ alors le système n'est pas chaotique.

- si $\lambda > 0$ alors le système est chaotique et imprévisible pour $t \gg \frac{1}{\lambda}$

La valeur de $\Delta x(0)$ n'est jamais nulle car la valeur de la condition initiale n'est jamais indéfiniment précise lors d'une expérience.

Contrôle du chaos :

Comme nous l'avons vu dans le cas du pendule forcé, le chaos peut être contrôlé grâce à un paramètre (ρ dans l'exemple) qui selon sa valeur donnera des attracteurs différents au système à l'équilibre (ou pseudo-équilibre si le système est chaotique).

Le phénomène chaotique peut bien être contrôlé comme le montre le contrôle de la fission nucléaire (chaotique) dans les centrales à l'aide de barre de bore qui captent les neutrons créés par la fission.

Attracteur étrange :

Les phénomènes chaotiques convergent vers un attracteur dit étrange dans l'espace des phases. Il s'agit d'une suite infinie de points à dimension fractale, c'est-à-dire que sa courbe représentative a une longueur infinie dans un espace fini.

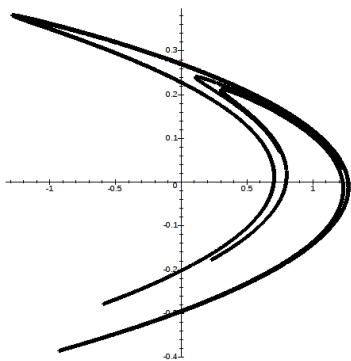
Il est apériodique (la trajectoire de la courbe dans l'espace des phases ne passe qu'une fois par le même point).

Deux trajectoires proches (avec un écart relatif inférieur à 1%) s'éloignent localement de façon exponentielle.

On peut prévoir que le système passera par un certain état ($z, \dot{z}$) dans l'espace des phases : il s'agit du côté prévisible des systèmes chaotiques.

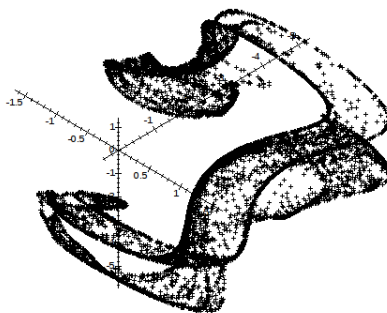
Chaque système chaotique dissipatif possède un attracteur étrange.

Exemples d'attracteurs étranges :



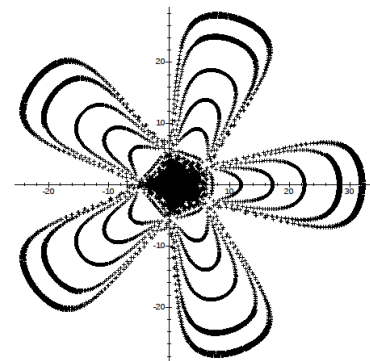
Attracteur étrange de Hénon

Il s'agit de l'attracteur étrange des orbites stellaires.



Attracteur étrange de Pickover

Il s'agit d'une modélisation 3D d'une solution mathématique.



Attracteur étrange de Gumowski-Mira

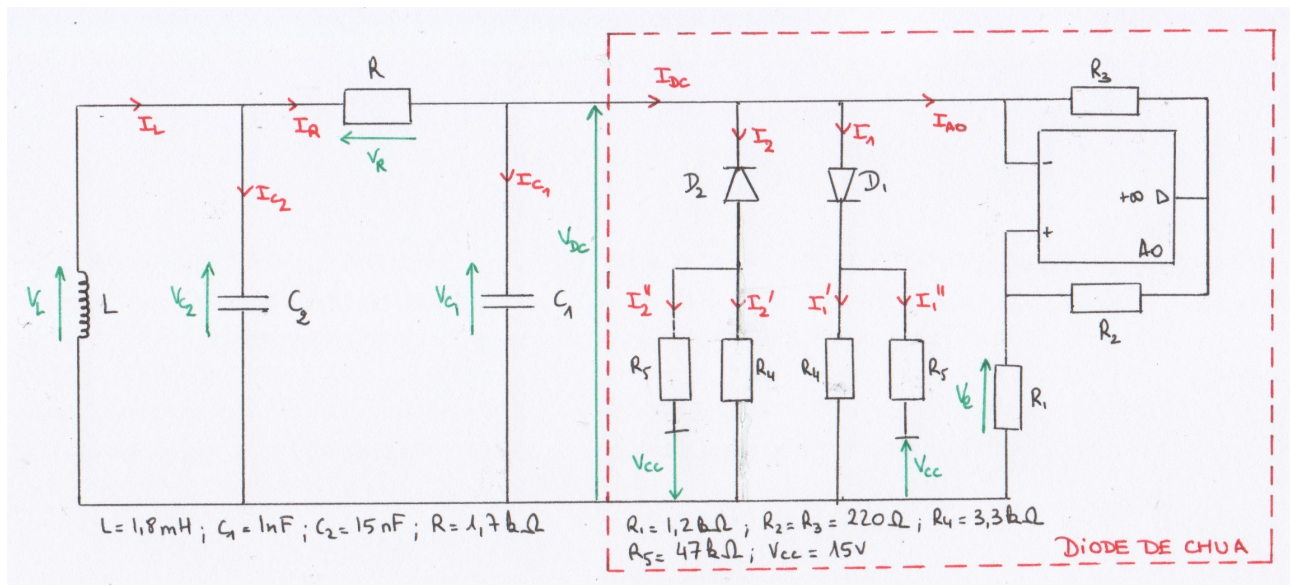
Il s'agit de l'attracteur étrange de particules se déplaçant à hautes vitesses dans un accélérateur de particules de forme cylindrique.

On remarque bien que le système chaotique se démarque des autres systèmes déterministes qui forment dans l'espace des phases une ellipse (système oscillant non amorti), une spirale convergeant vers l'origine (système oscillant dissipatif) ou divergente (système oscillant amplificateur), ...

II- Application à l'oscillateur de Chua :

1) Position du problème :

Oscillateur de Chua :



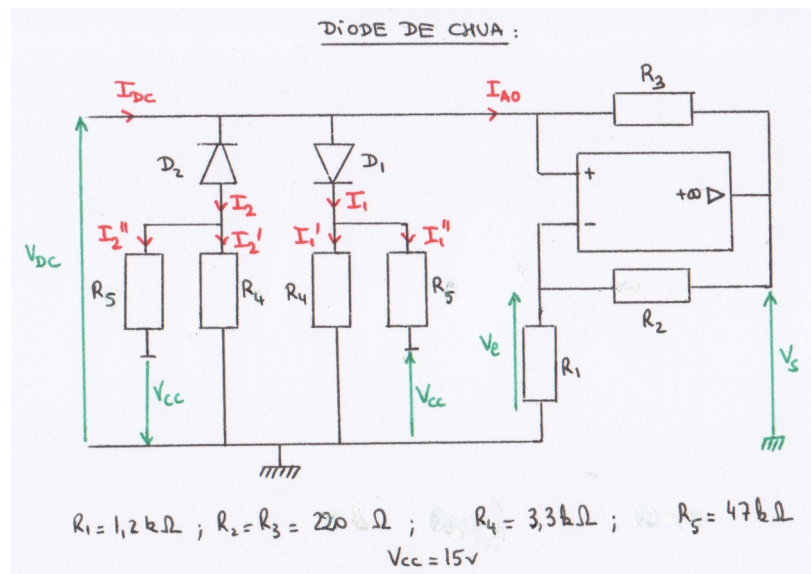
Approximations :

- On considérera l'amplificateur opérationnel idéal, on ne tiendra pas compte de son comportement fréquentiel.
- On considérera la diode comme idéale (cf sa caractéristique au II-2)3-).
- On négligera la résistance de la bobine (quelques ohms) et celle des fils.

2) Mise en équation :

a) Caractéristique de la diode de Chua :

1. Schéma de la diode de Chua :



2. Partie amplificateur opérationnel : $I_{AO} = f(V_e)$:

La sortie de l'amplificateur opérationnel (AO) est rebouclée sur la borne inverseuse donc l'AO fonctionne en régime linéaire : on a alors $V^+ = V^- = V_e$

$$V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$$

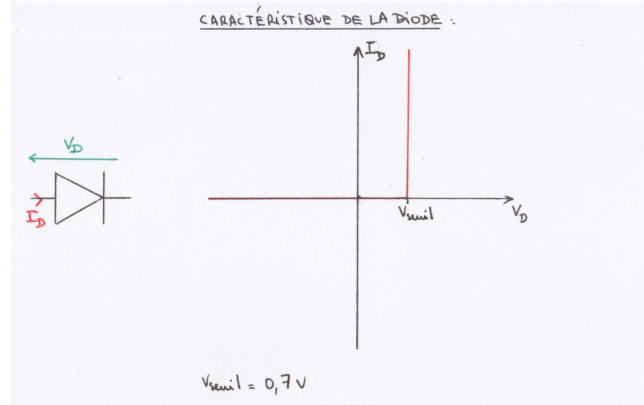
$$V_e - V_s = R_3 I_{AO}$$

$$\text{Donc } V_e \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = R_3 I_{AO} \Rightarrow V_e = V_{DC} = \frac{-R_1 R_3}{R_2} I_1 = R' I_{AO}$$

Le circuit est équivalent à une résistance négative de valeur $R' = \frac{-R_1 R_3}{R_2}$

3. Caractéristique de la diode de Chua : $I_{DC} = f(V_{DC})$:

Caractéristique de la diode D_1 :



Soit U_{R_i} la tension aux bornes de R_i en convention récepteur.

Branche D_1 :

$V_{D1} < V_{seuil}$: la diode $D1$ est non passante d'où $U_{R4} = V_{DC} - V_{D1} = \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{cc}$

$$\text{Donc } V_{DC} < V_{seuil} + \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{cc} = U_c$$

Branche D_2 :

$V_{D2} < V_{seuil}$: la diode $D2$ est non passante d'où $U_{R4} = V_{DC} + V_{D2} = \frac{-R_4}{R_4 + R_5} V_{cc}$

$$\text{Donc } V_{DC} > -V_{seuil} - \frac{R_4}{R_4 + R_5} V_{cc} = -U_c$$

$I_{DC} = f(V_{DC})$:

- Si $V_{DC} < -U_c$, la diode D_2 est passante, D_1 non passante :

$$\text{D'où } I_{DC} = I_{AO} + I_2' + I_2'' = \frac{V_{DC}}{R'} + \frac{V_{DC} + V_{seuil}}{R_4} + \frac{V_{DC} + V_{seuil} + V_{cc}}{R_5}$$

$$I_{DC} = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{DC} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{seuil} + \frac{V_{cc}}{R_5} = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{DC} + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_c$$

- Si $-U_c < V_{DC} < U_c$, les diodes sont non passantes :

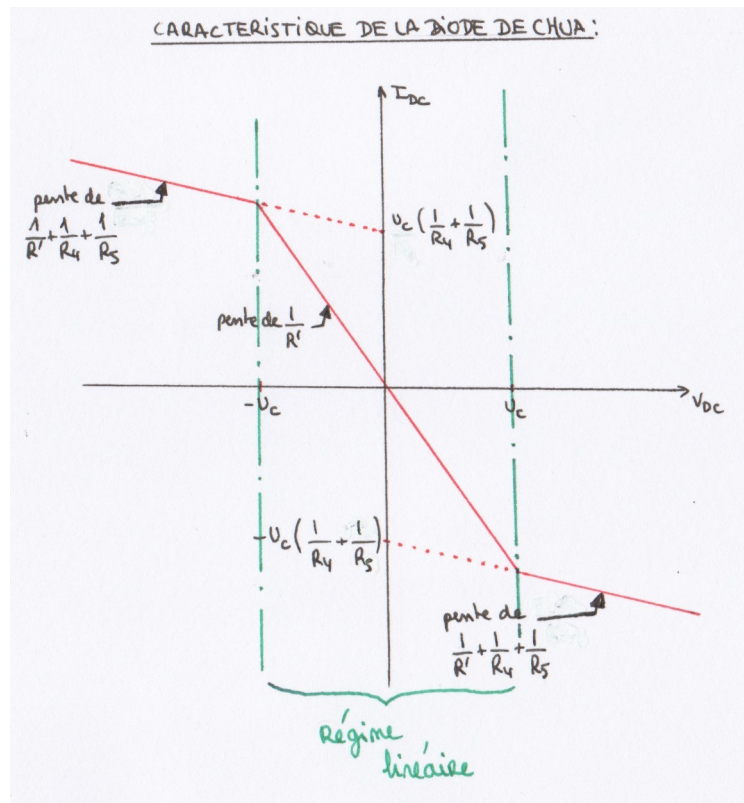
$$I_{DC} = \frac{V_{DC}}{R'}$$

- Si $V_{DC} > U_c$, la diode D_1 est passante, D_2 non passante :

$$\text{D'où } I_{DC} = I_{AO} + I_1' + I_1'' = \frac{V_{DC}}{R'} + \frac{V_{DC} - V_{seuil}}{R_4} + \frac{V_{DC} - V_{seuil} - V_{cc}}{R_5}$$

$$I_{DC} = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{DC} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{seuil} - \frac{V_{cc}}{R_5} = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_{DC} - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) U_c$$

On obtient la caractéristique de la diode de Chua suivante :



On vérifie bien que la caractéristique de la Diode de Chua est continue.

Pour les valeurs numériques citées ci-dessus, on a :

Si $V_{DC} < -1,68 \text{ v}$, $I_{DC} = -5,1 \cdot 10^{-4} V_{DC} + 5,5 \cdot 10^{-4}$

Si $-1,68 \text{ v} < V_{DC} < 1,68 \text{ v}$, $I_{DC} = -8,3 \cdot 10^{-4} V_{DC}$

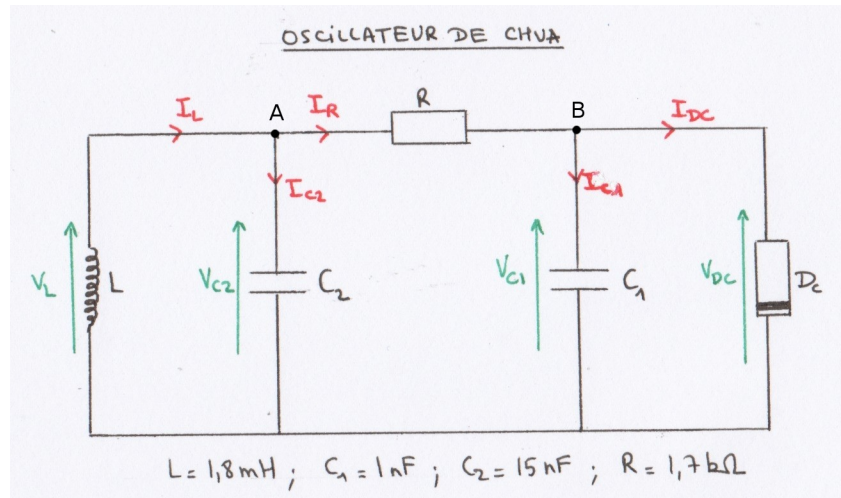
Si $V_{DC} > 1,68 \text{ v}$, $I_{DC} = -5,1 \cdot 10^{-4} V_{DC} - 5,5 \cdot 10^{-4}$

On remarque que quel que soit la valeur de V_{DC} :

$$I_{DC} = f(V_{DC}) = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_{DC} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) \cdot (|V_{DC} + U_C| - |V_{DC} - U_C|)$$

b) Équations régissant l'oscillateur :

Schéma équivalent :



Loi des nœuds en B : $I_R = I_{C1} + I_{DC} \Rightarrow \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{RC_1} - \frac{f(V_{C1})}{C_1}$

Loi des nœuds en A : $I_L = I_{C2} + I_R \Rightarrow \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{I_L}{C_2} + \frac{V_{C1} - V_{C2}}{RC_2}$

Bobine : $V_L = -L \frac{dI_L}{dt} \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = -\frac{V_{C2}}{L}$

On pose $x_1 = \frac{V_{C1}}{U_c}$, $x_2 = \frac{V_{C2}}{U_c}$, $x_3 = \frac{RI_L}{U_c}$, $t_c = \frac{t}{RC_2}$ pour adimensionner les équations.

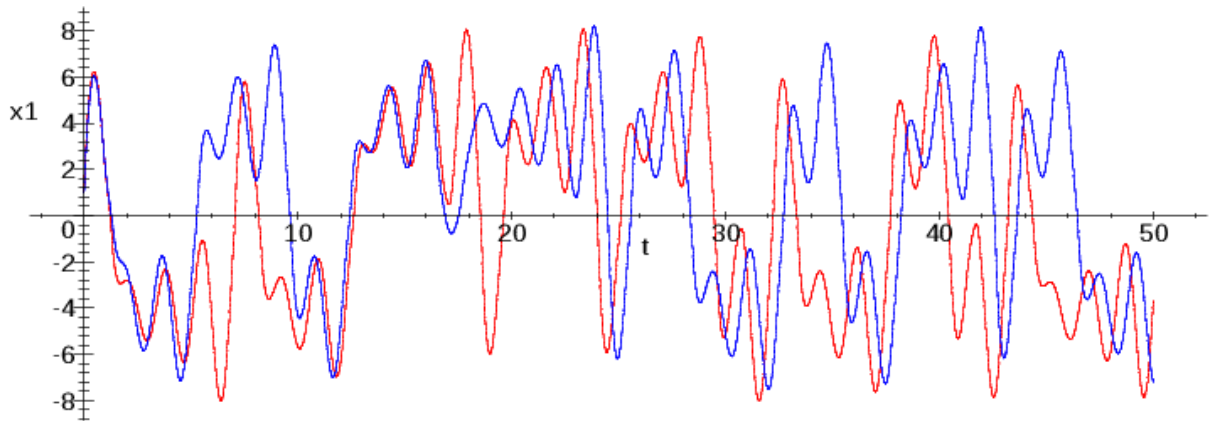
On obtient les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_c} &= \frac{C_2}{C_1}(x_2 - x_1 - g(x_1)) \\ \frac{dx_2}{dt_c} &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt_c} &= -C_2 \frac{R^2}{L} x_2 \\ g(x_1) &= \left(\frac{R}{R'} + \frac{R}{R_4} + \frac{R}{R_5}\right)x_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_4} + \frac{R}{R_5}\right) \cdot (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|) \end{aligned}$$

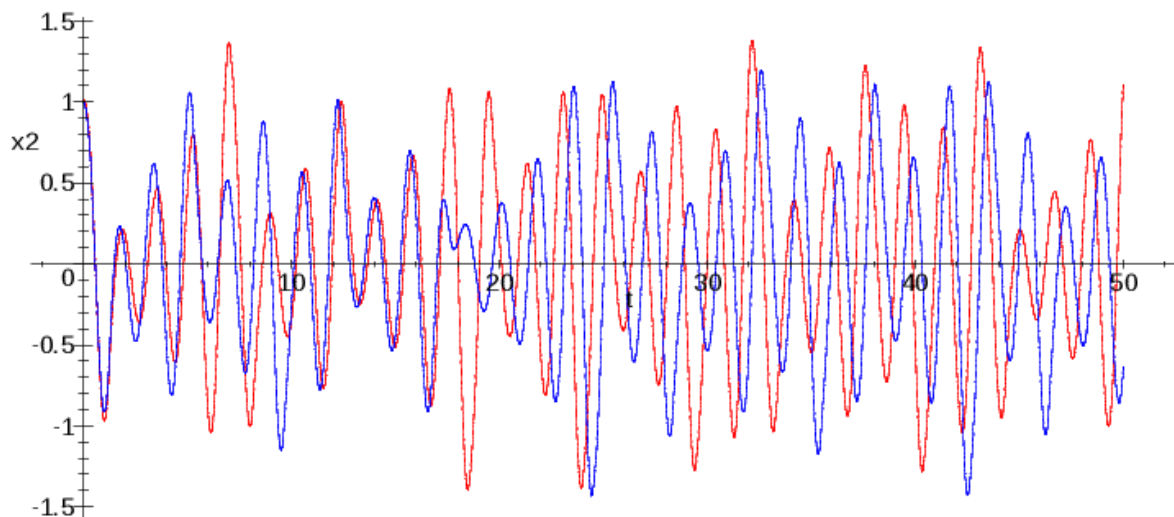
3) Résolution graphique des équations :

Courbes en fonction du temps pour deux conditions initiales (1,1,0) et (1.01,1.01,0), ce qui représente une erreur relative de 1 %.

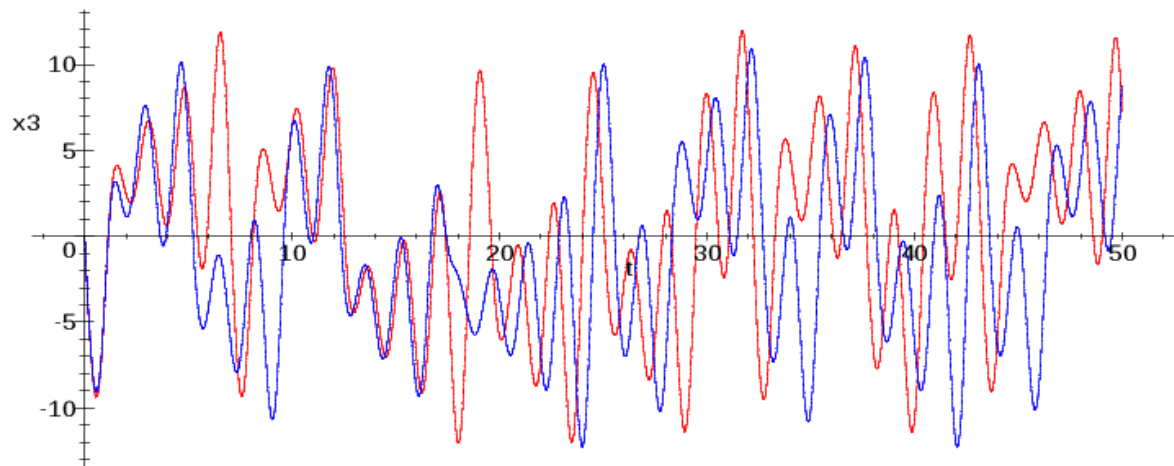
Allure de $x_1(t_c)$:



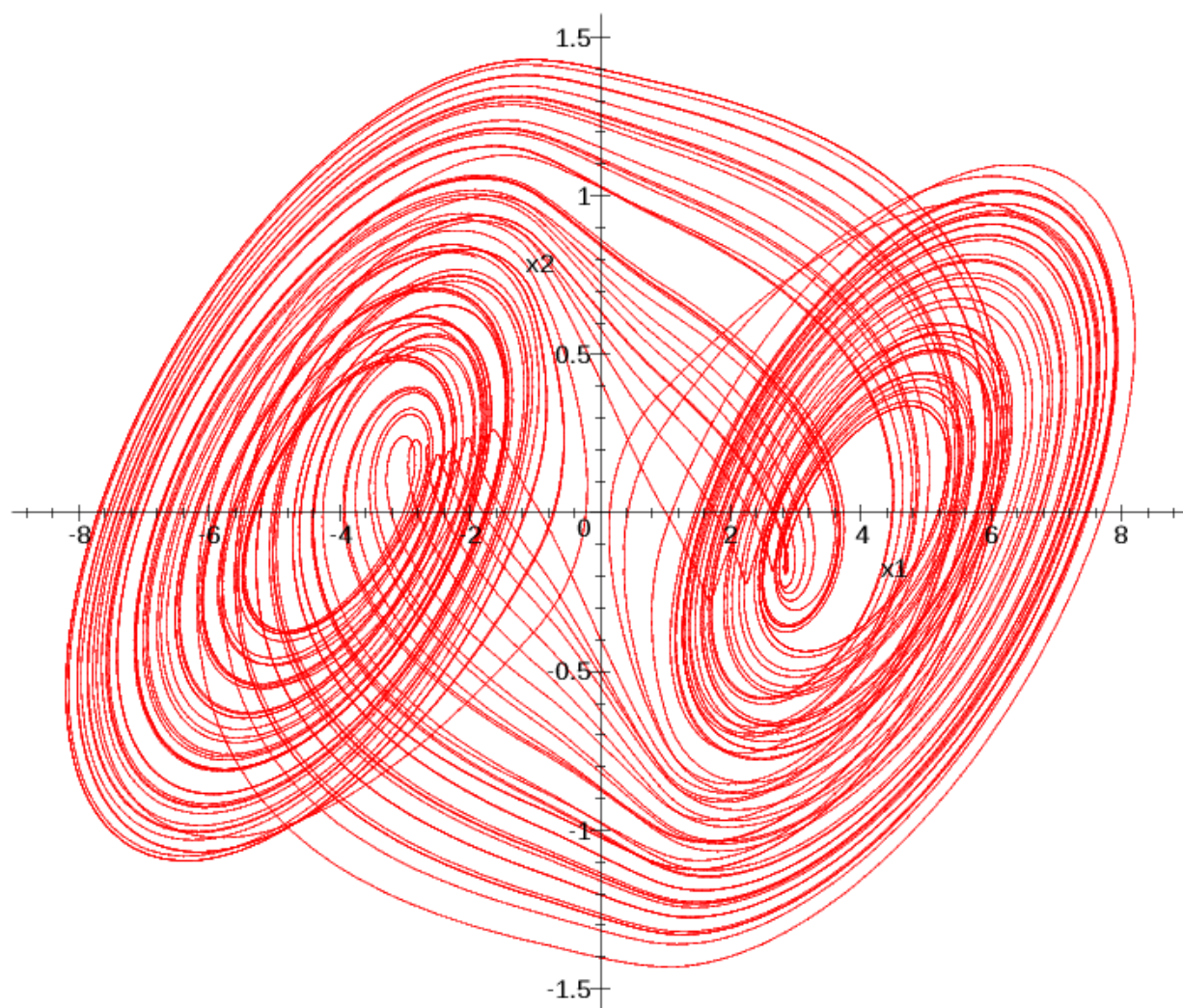
Allure de $x_2(t_c)$:



Allure de $x_3(t_c)$:



Attracteur étrange : $x_2 = f(x_1)$

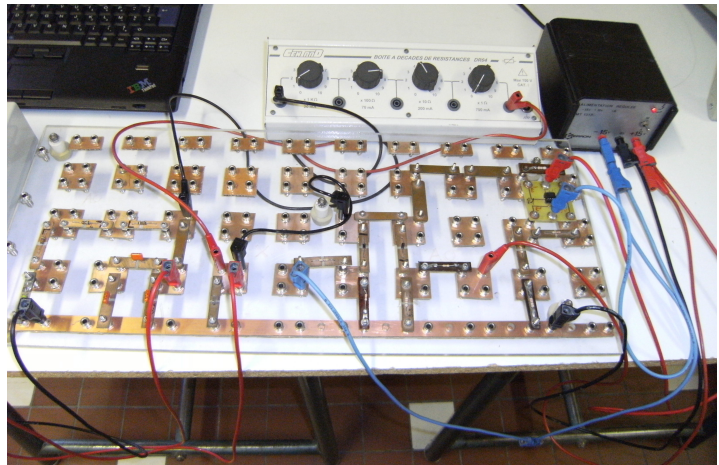


Le système est chaotique pour des valeurs de R supérieures à 1700Ω .

4) Expérience et limites rencontrées :

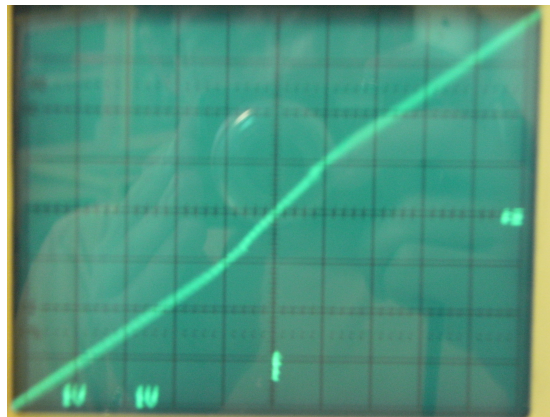
1- Montage :

L'expérience est réalisée avec les composants cités précédemment, un oscilloscope et un ordinateur avec ORPHY.

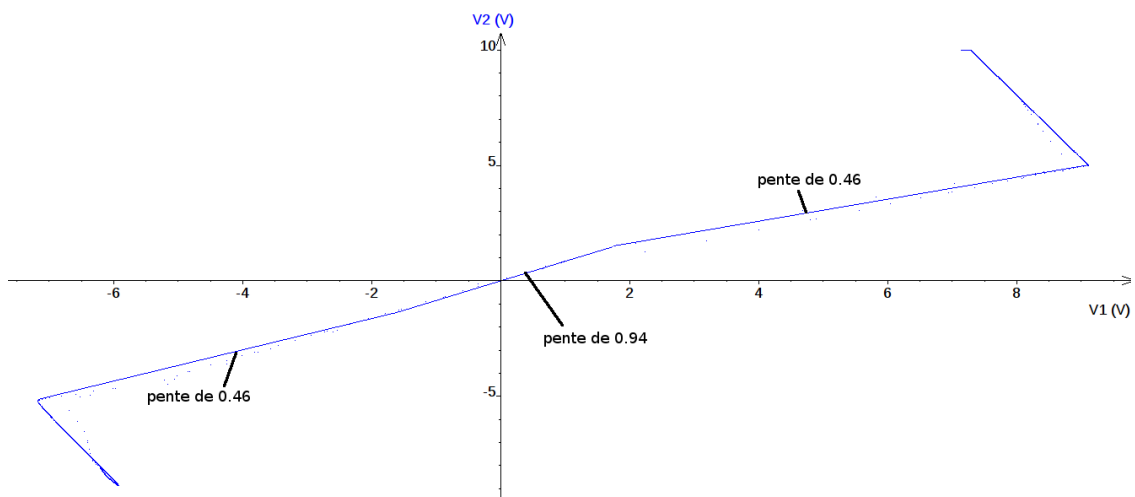


2- Caractéristique de la diode de Chua : $V_1=V_{DC}$; $V_2=-R.I_{DC}$ ($R=1k\Omega$) :

- à l'oscilloscope :



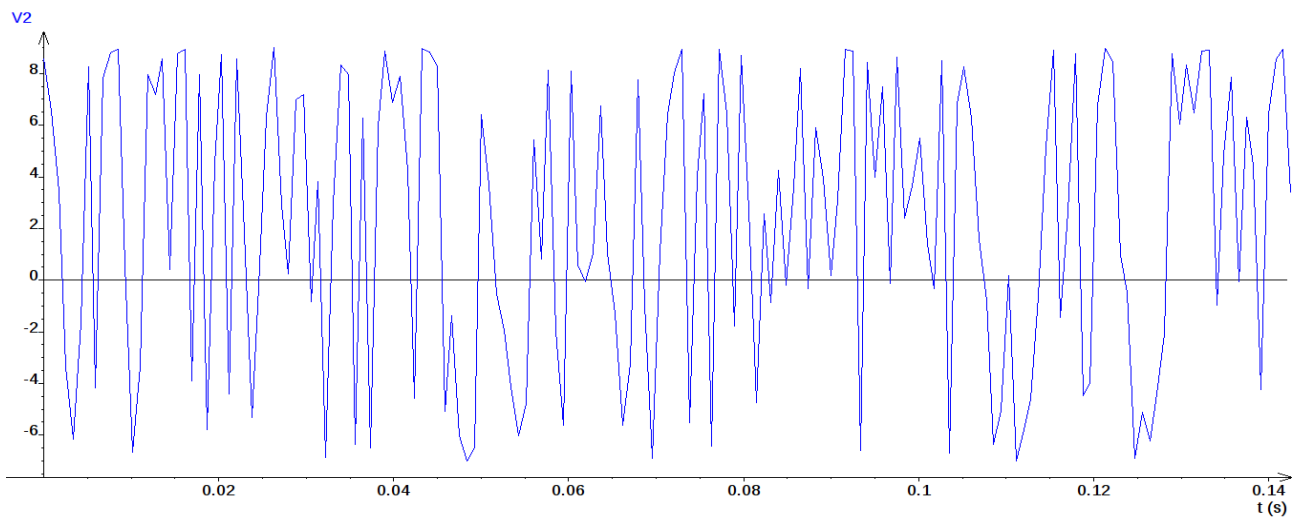
- avec ORPHY et REGRESSI :



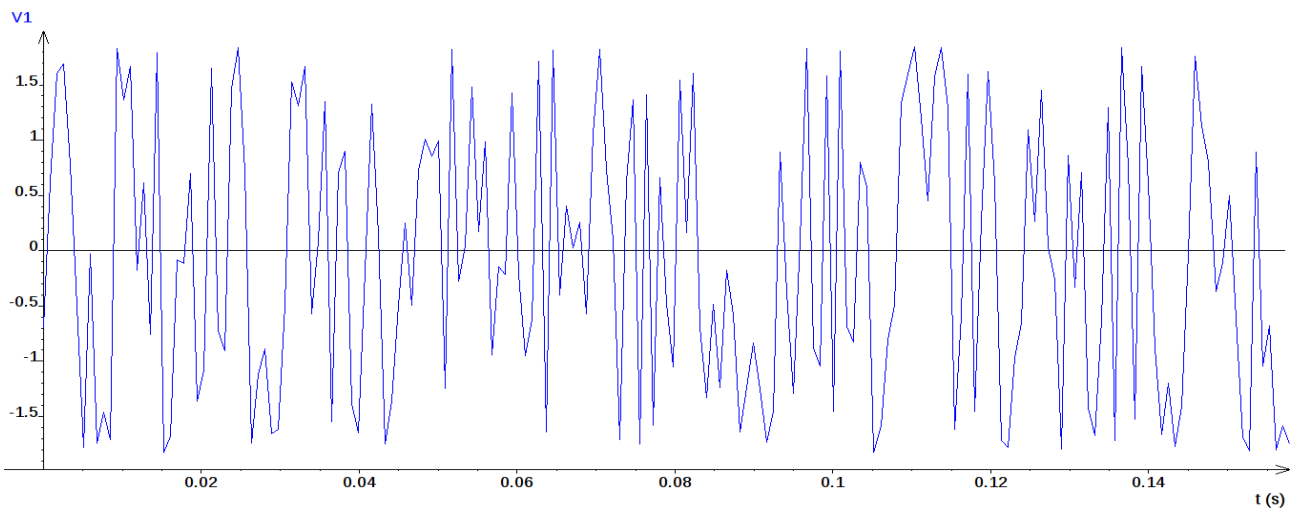
Pour $-5v < V_2 < 5v$, on obtient la caractéristique théorique avec des valeurs de pente proches. En dehors de cette zone, les différences sont dues à l'approximation de la caractéristique des diodes D_1 et D_2 qui a plutôt l'allure d'une exponentielle croissante ainsi qu'à une saturation possible de l'amplificateur opérationnel : $|V_s| < V_{sat} = 15v$.

3- Courbes temporelles :

$V_{C1}(t)$:



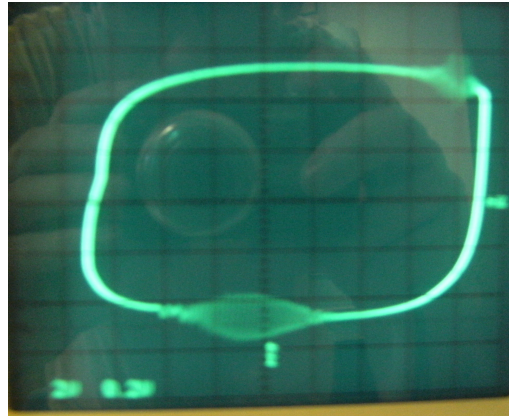
$V_{C2}(t)$:



On remarque bien que le système est apériodique. On peut donc en conclure qu'il est chaotique vu que l'on obtient les mêmes types de courbes que dans la théorie.

- Attracteur étrange : $V_{C1}=V_2=f(V_{C2})=f(V_1)$:

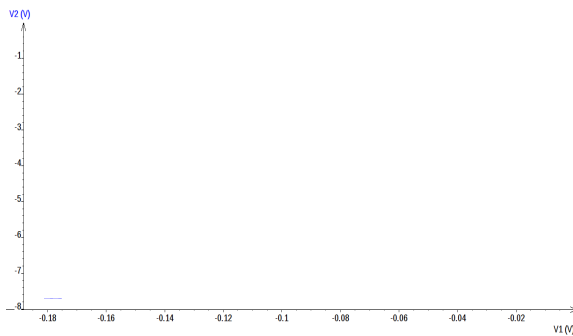
- à l'oscilloscope :



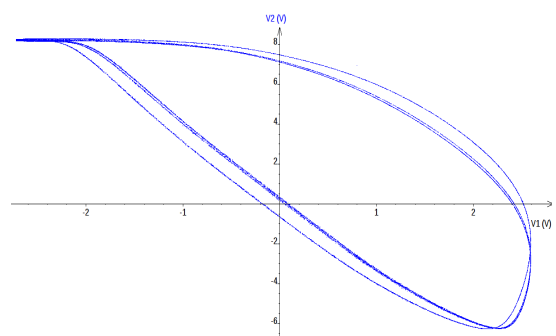
On n'obtient pas un attracteur étrange, cela est certainement dû à la vitesse d'acquisition de l'oscilloscope.

- avec ORPHY :

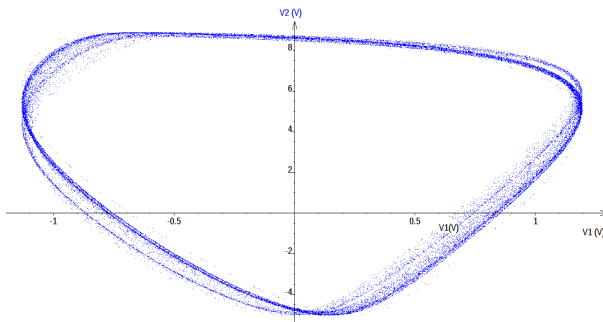
Pour $R=1470\Omega$:



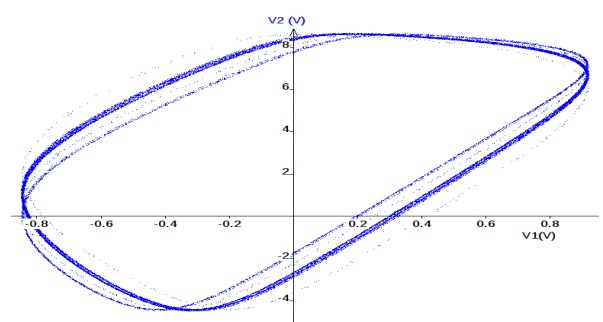
Pour $R=1480\Omega$:



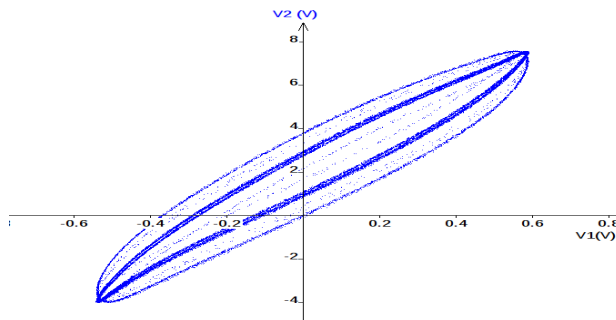
Pour $R=1700\Omega$:



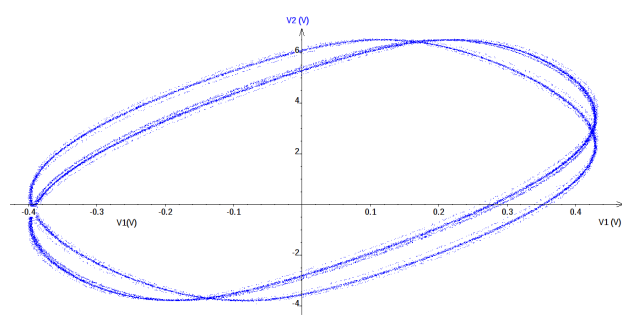
Pour $R=1800\Omega$:



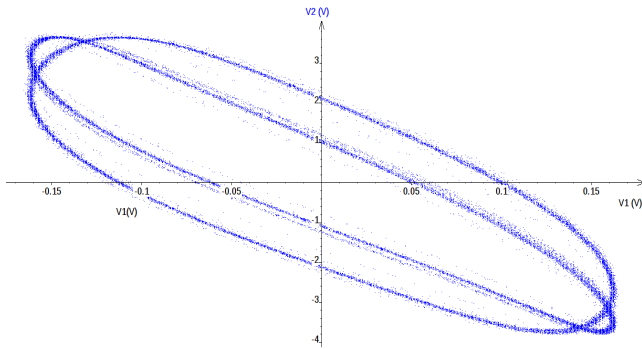
Pour $R=1900\Omega$:



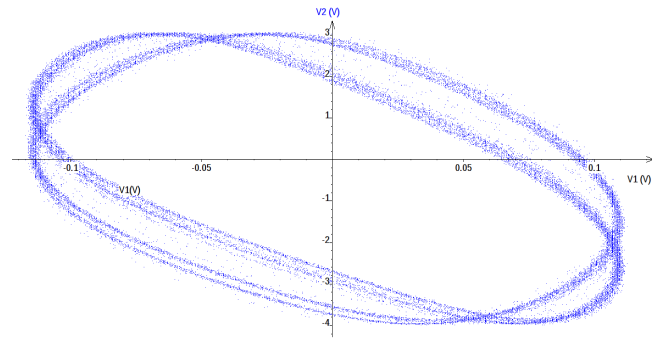
Pour $R=2000\Omega$:



Pour $R=3000\Omega$:



Pour $R=4000\Omega$:

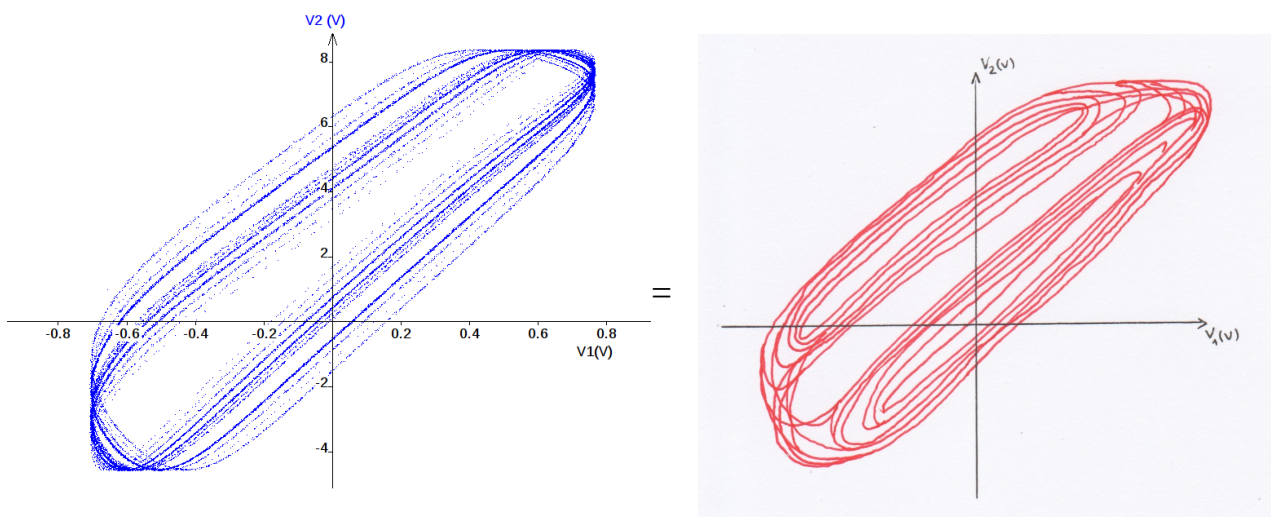


Pour $R < 1480\Omega$, on obtient que l'oscillateur de Chua converge vers une position d'équilibre stable (V_{C1} et V_{C2} sont constants).

Pour $R > 1480\Omega$, on obtient un attracteur étrange qui dépend de la valeur de R .

Cette valeur limite est différente de la valeur théorique, cela est dû à l'imprécision sur les valeurs des résistances lors de l'expérience et au fait de la négligence de la résistance des fils et de la bobine.

On observe alors plusieurs fuseaux que l'on peut interpréter pour $R=1840\Omega$ par :



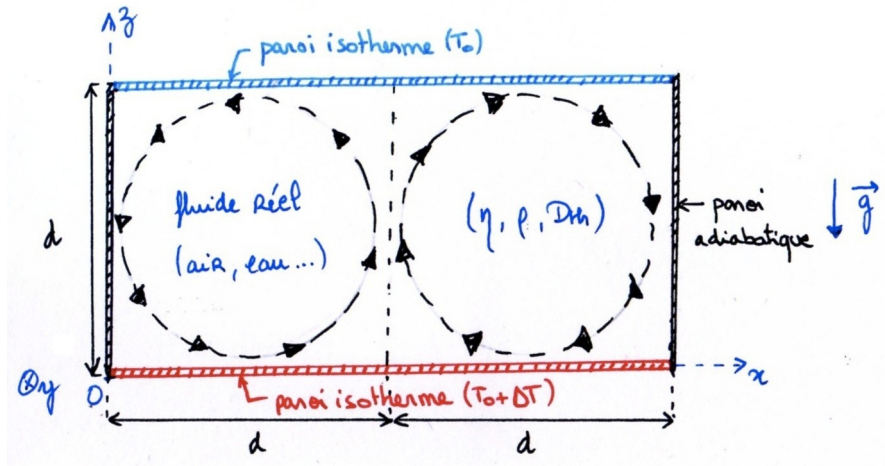
On retrouve alors l'attracteur étrange théorique en supposant que pour la caractéristique réelle des diodes, la saturation possible de l'amplificateur opérationnel et la valeur de R choisie, le passage d'une aile à l'autre se fait majoritairement par la périphérie.

III- Application à la convection de Rayleigh-Bénard :

1) Position du problème :

La convection de Rayleigh-Bénard est présente dans la vie de tous les jours : elle régit la dynamique des océans, de l'atmosphère, du magma au centre de la Terre mais aussi l'eau chauffée dans une casserole.

Modèle :



Soit $\Delta T > 0$ et $\Delta T \sim 100 K$, $d \sim 1m$.

Le fluide en $z=d$ est plus dense qu'en $z=0$. Donc deux phénomènes peuvent alors se produire : soit une diffusion thermique sans convection, le fluide est au repos, soit une diffusion thermique avec convection si $\Delta T > \Delta T_0$ on obtient alors des rouleaux convectifs. C'est ce phénomène qui sera étudié ici.

Ce phénomène a été étudié par Rayleigh en 1916 pour la première fois.

On considérera dans la suite que le fluide est de l'eau et le système est une particule de fluide.

2) Mise en mouvement :

1. Temps caractéristique de la diffusion thermique : τ_{th}

D'après l'équation de diffusion $\frac{DT}{dt} = D_{th} \Delta T$ on obtient $\frac{T}{\tau_{th}} \sim D_{th} \frac{T}{d^2}$

$$\text{D'où : } \tau_{th} \sim \frac{d^2}{D_{th}}$$

2. Temps caractéristique du mouvement d'une particule de fluide : τ_c

D'après l'équation de Navier-Stokes, $\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$

On considère que seules la pesanteur et la viscosité mettent en mouvement une particule de fluide : $\rho_0 \frac{v}{\tau_c} \sim \eta \frac{v}{d^2} - \Delta \rho g$.

$$\text{D'où : } \rho_0 \frac{d}{\tau_c^2} \sim \eta \frac{1}{d \tau_c} - \Delta \rho g \Rightarrow \tau_c^2 - \frac{\eta}{\Delta \rho g d} \sim \frac{\rho_0 d}{\Delta \rho g}$$

Donc on obtient $\tau_c \sim -K \frac{\eta}{\Delta \rho d g}$ avec K une constante.

3. Relation entre ρ et T :

Coefficient de dilatation volumique : $\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}_P$

Coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial P}_T$

$$\text{D'où } d\rho = -\rho_0 \alpha dT + \rho_0 \chi_T dP$$

Or pour l'eau, $\chi_T \Delta P \sim \chi_T \rho_0 g d \sim 5.10^{-6}$ et $\alpha \Delta T \sim 10^{-2}$ donc $d\rho = -\rho_0 \alpha dT$

En intégrant, $\Delta \rho = -\rho_0 \alpha \Delta T$

$$\text{D'où } \tau_c \sim \frac{\eta}{\alpha \rho_0 d g \Delta T}$$

4. Différents états possibles :

Soit $R_a = Gr.Pr = \frac{\alpha \rho_0 d^3 g}{\eta D_{th}} \Delta T = K \frac{\tau_{th}}{\tau_c}$ le nombre de Rayleigh. Pr nombre de Prandtl (rapport en diffusivité de quantité de mouvement et diffusivité thermique) et Gr nombre de Grashof (rapport entre forces de gravité et forces de viscosité).

On appelle K le nombre de Rayleigh critique qui sépare le régime stationnaire du régime convectif. Il est de l'ordre de 10^3 .

- Si $\tau_{th} < \tau_c$ alors $R_a < K$ et $\Delta T < \Delta T_0$: il n'y a pas de convection : la diffusion assure à elle seule le transfert thermique : la chaleur n'arrive pas à vaincre la viscosité du fluide pour le fluide en mouvement.

- Si $\tau_{th} \sim \tau_c$ alors $R_a \sim K$: la particule de fluide est mise en mouvement car la diffusion thermique n'arrive plus à assurer le transfert thermique.

- Si $\tau_{th} > \tau_c$ alors $R_a > K$ et $\Delta T > \Delta T_0$: La convection est prédominante. Elle se fait par rouleaux qui donne au fluide un mouvement de rotation uniforme.

- Si $\tau_{th} \gg \tau_c$ alors $R_a \gg K$ le mouvement devient instable à cause de la turbulence du fluide (nombre de Reynolds $> 1000-2000$) : il s'agit du régime chaotique. Dans ce cas, les rouleaux n'ont plus une vitesse uniforme, mais oscillent avec des inversions spontanées non prévisibles. Cela est dû au fait que les particules de fluides sont encore trop chaudes quand elles redescendent, ce qui provoque une remontée de ces particules à cause de leur densité et donc une inversion de rotation des rouleaux.

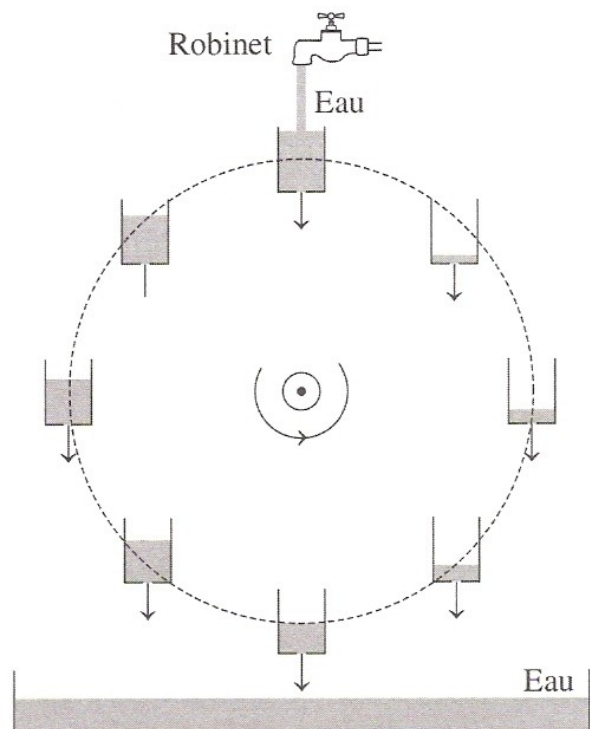
5. Analogie : la roue hydraulique de Lorenz :

La roue hydraulique est une roue composée de seaux percés et d'une source d'eau venant du dessus (cf schéma).

Pour un petit débit volumique, les frottements de la roue ne sont pas vaincus par le remplissage du premier seau.

Pour un grand débit volumique, la vitesse de la roue est constante et ne tourne que dans un sens (les seaux arrivent vides en bas).

Pour un plus grand débit volumique, la roue oscille avec des inversions spontanées (régime chaotique) dues au fait que les seaux arrivent encore pleins en bas.



3) Mise en équation :

1. Équations du mouvement :

Le système est régi par trois équations non linéaires :

- L'équation de Navier-Stokes :
$$\frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\rho\vec{v} = -\overrightarrow{grad} P + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$
- L'équation de conservation de la masse :
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} = 0$$
- L'équation de diffusion thermique :
$$\frac{DT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})T = D_{th} \nabla^2 T$$

On a obtenu au III-2)3. $\rho = \rho_0 - \alpha \rho_0 (T - T_2)$. D'après l'approximation de Boussinesq, on n'en tiendra compte que dans le terme de gravité. Dans les autres termes, $\rho = \rho_0$.

Soient $\nu = \frac{\eta}{\rho_0}$ la viscosité cinématique du fluide, $P = p + p_1$ avec p_1 la pression hydrostatique et θ la perturbation de température par rapport au régime stationnaire.

On obtient alors $\theta(x, z, t) = T(x, z, t) + \frac{\Delta T}{d} z - T_0 - \Delta T$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{grad} p + \rho_0 \alpha g \theta \vec{e}_z + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \theta &= \frac{\Delta T}{d} (\vec{v} \cdot \vec{e}_z) + D_{th} \nabla^2 \theta \end{aligned}$$

On pose $r' = \frac{r}{d}$, $t' = \frac{D_{th}}{d^2} t$, $\theta' = \frac{R_a}{\Delta T} \theta$, $p' = \frac{d^2}{\eta D_{th}} p$ des coefficients adimensionnés.

On obtient alors $\vec{v}' = \frac{d}{D_{th}} \vec{v}$ et le système :

$$\frac{D_{th}}{\nu} \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \overrightarrow{grad}') \vec{v}' \right) = -\overrightarrow{grad}' p' + \theta' \vec{e}_z + \nabla'^2 \vec{v}' \quad (1)$$

$$\nabla' \vec{v}' = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \overrightarrow{grad}' \theta' = R_a (\vec{v}' \cdot \vec{e}_z) + \nabla'^2 \theta' \quad (3)$$

2. Mouvement dans le plan (xOz) : détermination de v' et θ :

On se place alors dans le plan (xOz) où la particule de fluide a un mouvement plan sous forme de rouleaux (cf schéma).

On a alors $\vec{v}'(x', z', t') = u(x', z', t')\vec{e}_x + w(x', z', t')\vec{e}_z$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial w}{\partial z'} = 0$$

On peut poser Ψ de classe C^2 tel que $u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z'}$ et $w = \frac{\partial \Psi}{\partial x'}$

Conditions aux limites :

- aucun flux de matière à travers les surfaces en $z'=0$ et $z'=1$:

$$w(z'=0) = w(z'=1) = 0$$

- aucune force de viscosité sur les surfaces dites libres en $z'=0$ et $z'=1$:

$$\frac{\partial u}{\partial z'}(z'=0) = \frac{\partial u}{\partial z'}(z'=1) = 0$$

- Système de rouleaux suivant $\mathbf{e}_x$:

D'où $\Psi(z'=0) = \Psi(z'=1) = 0$
 $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2}(z'=0) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z'^2}(z'=1) = 0$ donc $\Psi(x', z', t') = \Psi_1(t) \sin(qx') \sin(\pi z')$ on

obtient alors les fonctions u et w.

- en $z'=0$ et $z'=1$, la température est constante et égale à la température du régime stationnaire donc $\theta'(z'=0) = \theta'(z'=1) = 0$.

On pose alors $\theta'(x', z', t') = \theta_1(t') \sin(\pi z') \cos(qx') + \theta_2(t) \sin(2\pi z')$ pour tenir compte de la dissymétrie des axes x et z en θ' .

4. Obtentions des équations de Lorenz :

Soit $(1_{x'})$ et $(1_{z'})$ les équations projetées de (1) respectivement sur l'axe $0x'$ et Oz' .

$$\frac{\partial}{\partial x'}(1_{z'}) - \frac{\partial}{\partial z'}(1_{x'}) \Rightarrow \frac{D_{th}}{v} \left[\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(u \frac{\partial w}{\partial x'} + w \frac{\partial w}{\partial z'} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(u \frac{\partial u}{\partial x'} + w \frac{\partial u}{\partial z'} \right) \right] = \Delta^2 \Psi + \frac{\partial \theta'}{\partial x'}$$

On remplace Ψ , u , v , et θ on trouve alors : $\frac{D_{th}}{v} \frac{d\Psi_1}{dt'} + (\pi^2 + q^2) \Psi_1 = \frac{q}{\pi^2 + q^2} \theta_1$

L'équation (3) donne en regroupant les termes en $\sin(\pi z)\cos(qx)$ et $\sin(2\pi z)$:

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt'} &= -\pi q \Psi_1 \theta_2 + q R_a \Psi_1 - (\pi^2 + q^2) \theta_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt'} &= \frac{1}{2} \pi q \Psi_1 \theta_1 - 4\pi^2 \theta_2 \end{aligned}$$

En posant, $T = (\pi^2 + q^2) t'$, $X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)} \Psi_1$, $Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)^3} \theta_1$, $Z = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(\pi^2 + q^2)^3} \theta_2$
 $Pr = \frac{v}{D_{th}}$, $r = \frac{q^2}{(\pi^2 + q^2)^3} R_a$, $b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}$ on retrouve les équations de Lorenz :

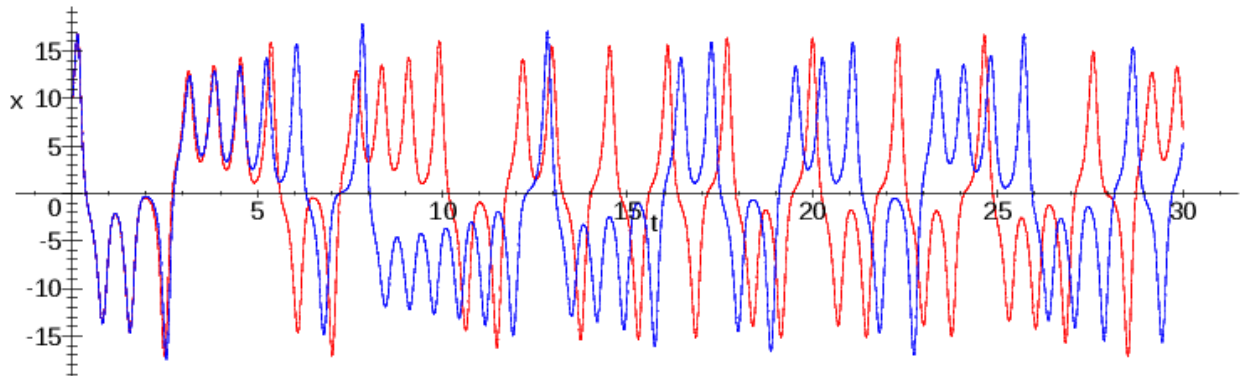
$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= Pr(Y - X) \\ \frac{dY}{dT} &= -XZ + rX - Y \\ \frac{dZ}{dT} &= XY - bZ \end{aligned}$$

4) Résolution graphique :

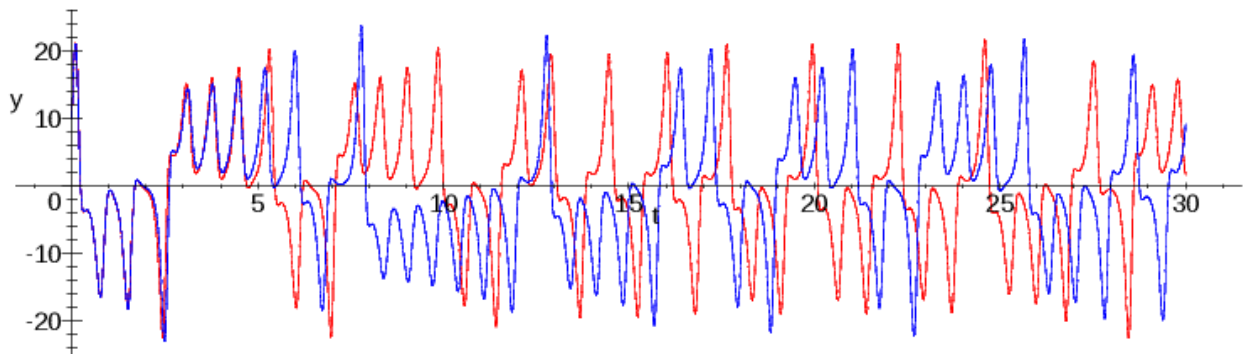
On prend $Pr=10$ $b=8/3$ $r=28$

Courbes en fonction du temps pour deux conditions initiales $(10,10,10)$ et $(10.01,10.01,10.01)$, ce qui représente une erreur relative de 0.1 %.

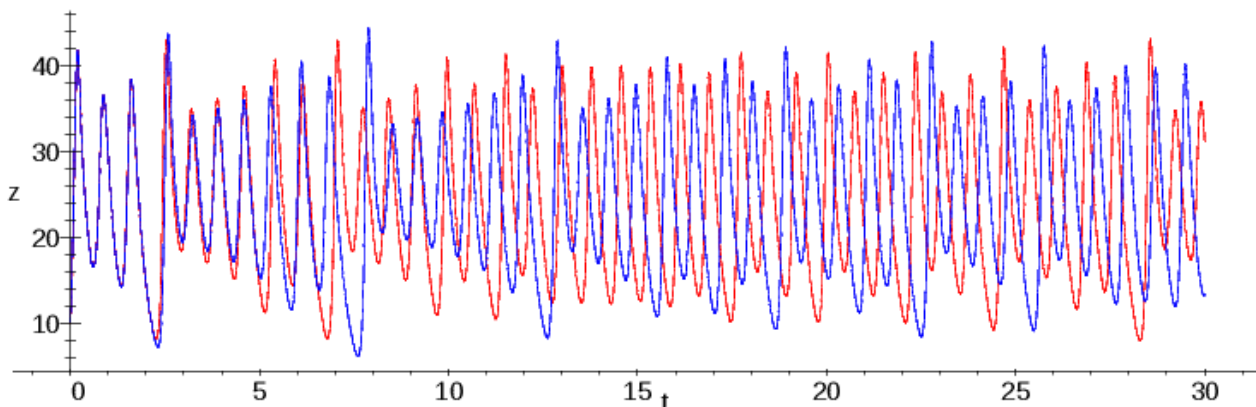
Allure de $X(T)$:



Allure de $Y(T)$:



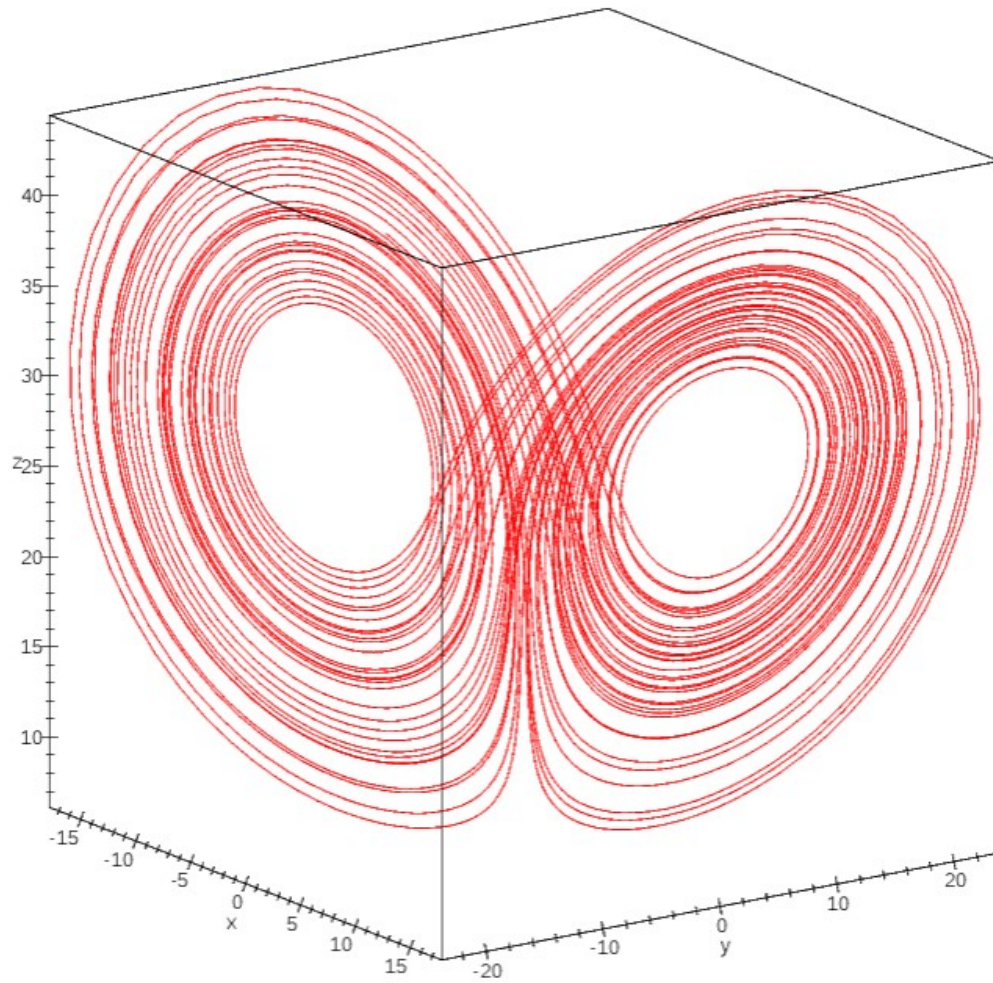
Allure de $Z(T)$:



On remarque finalement que le système est bien chaotique.

Attracteur étrange :

Étant dissipatif, le système admet alors un attracteur étrange.



Conclusion :

Cette étude sur les systèmes chaotiques permet de dire que le chaos touche beaucoup de domaines de la physique tels que la mécanique, l'électricité et la météorologie. Cependant, un système peut être à la fois chaotique et non chaotique suivant les paramètres qu'on lui impose (l'amplitude du couple donné au pendule, la résistance de l'oscillateur de Chua et la différence de température pour la convection de Rayleigh-Bénard).

Pour des systèmes tels que l'atmosphère, cette différence de température ne peut pas être modifiée par l'homme, donc, en météorologie, la prévision ne pourra jamais se faire sur une très grande durée (supérieure à 1 mois). Il en est de même pour l'économie et la biologie.

Pour des systèmes électriques et mécaniques, la valeur de ces paramètres peut être aisément changés donc si la prévision éternelle du circuit est voulue, elle peut être réalisée en adaptant la valeur de ces paramètres.

Bibliographie :

Chaos :

<http://eurserveur.insa-lyon.fr/approphys/9Math&Phys/Chaos/> (novembre 2011)
<http://www.edelo.net/chaos/sommaire.htm> (novembre 2011)
[http://www.questmachine.org/article/La théorie du chaos](http://www.questmachine.org/article/La_th%C3%A9orie_du_chaos) (décembre 2011)
<http://www.astrosurf.com/cieldaunis/chaos/index.html> (décembre 2011)
<http://emmanuel.dauce.free.fr/sdsc/dau.html> (décembre 2011)
<http://emmanuel.dauce.free.fr/these/node67.html> (décembre 2011)
<http://chaos.pagesperso-orange.fr/intro.htm> (décembre 2011)
<http://www.obs-nice.fr/etc7/utls/> (décembre 2011)
<http://vivienmallet.net/chaos/index.php> (décembre 2011)
<http://just.loic.free.fr/index.php?page=accueil> (décembre 2011)
[http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos fract/chaos/chaos.html](http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/chaos/chaos.html) (décembre 2011)

Oscillateur de Chua :

<http://lensors.ovh.org/fractals/index.php?page=diode> (février 2012)
<http://www.chuacircuits.com/> (février 2012)

Lorenz :

<http://hmf.enseeiht.fr/travaux/projnum/content/2011-g4/accueil> (février 2012)
<http://bcev.nfrance.com/Lorenz/equations.htm> (février 2012)
<http://images.math.cnrs.fr/Le-moulin-a-eau-de-Lorenz.html> (novembre 2011)
<http://www.cax.free.fr/chaos/chaos.html> (novembre 2011)

Livre :

La théorie du chaos de James Gleick – Flammarion Champs sciences (1987-2008).
Les lois du chaos d'Ilya Prigine – Flammarion Champs sciences (1993-2008).

Annexe 1 : Programmes sous MAPLE :

Résolution et tracé des solutions d'une équation différentielle sous MAPLE :

1. Obtention des courbes $x=f(t)$:

paramètres : eq=équation différentielle, $x(t)$ =fonction dépendant du temps, x_0 =position initiale, Dx_0 =vitesse initiale.

```
chaos:=proc(eq,x,x0,Dx0)
local f,g ;
f:=dsolve({eq,x(0)=x0,D(x)(0)=Dx0},x(t),numeric) ;
g:=dsolve({eq,x(0)=1.01*x0,D(x)(0)=1.01*Dx0},x(t),numeric) ;
with(plots) ;
display(odeplot(f,[t,x(t)],0..30,numpoints=300,color=red),odeplot(g,[t,x(t)],0..30,numpoints=300,color=blue) ;
end ;
```

2. Obtention des différentes courbes avec DEtools :

{eq1, eq2} système de deux ED du 1^e ordre équivalent à l'ED vérifiée par le système.

$$\begin{aligned} \text{Exemple pour le pendule forcé :} \\ eq1 := \frac{dx}{dt} = y ; \\ eq2 := \frac{dy}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} y + \omega_0^2 \sin(x) = \rho \sin(\omega t) ; \end{aligned}$$

a) position en fonction du temps : $x=f(t)$:

```
with(DEtools) ;
DEplot({eq1, eq2},[x(t),y(t)],t=0..30,stepsize=0.001,[[x(0)=x0,y(0)=Dx0],[x(0)=1.01*x0,y(0)=1.01*Dx0]],
scene=[t,x],linecolor=[red,green]) ;
```

b) vitesse en fonction du temps : $y=f(t)$:

```
DEplot({eq1, eq2},[x(t),y(t)],t=0..30,stepsize=0.001,[[x(0)=x0,y(0)=Dx0],[x(0)=1.01*x0,y(0)=1.01*Dx0]],
scene=[t,y],linecolor=[red,green]) ;
```

c) portrait de phase (ou attracteur étrange) :

```
DEplot({eq1, eq2},[x(t),y(t)],t=0..30,stepsize=0.001,[[x(0)=x0,y(0)=Dx0]]) ;
```

Pour 3 équations en x, y, z fonctions de t : (II et III)

```
DEplot3d({eq1, eq2, eq3},[x(t),y(t),z(t)],t=0..30,stepsize=0.001,[[x(0)=x0,y(0)=y0,z(0)=z0]]) ;
```

Pour avoir une projection dans le plan (xOy) :

```
DEplot({eq1, eq2, eq3},[x(t),y(t),z(t)],t=0..30,stepsize=0.001,[[x(0)=x0,y(0)=y0,z(0)=z0]],scene=[x,y]) ;
```

Annexe 2 : Équations du pendule sans $m \ll M$:

Système: {masse+tige}

Même bilan de forces que précédemment.

$$\sigma_{\Delta} = \sigma_{tige} + \sigma_{masse} = \left(\frac{m}{3} + M\right) l^2 \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{P}_{tige}) + M_{\Delta}(\vec{P}_{masse}) = -\left(\frac{m}{2} + M\right) l g \sin \theta$$

On obtient alors les équations suivantes :

- Pendule libre sans frottement :

$$\ddot{\theta} + \frac{3m+6M}{2m+6M} \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

- Pendule forcé :

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{2m+6M} \dot{\theta} + \frac{3m+6M}{2m+6M} \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{6\alpha}{(2m+6M)l^2} \sin(\omega t) \quad \text{si } R_e \ll 1$$

$$\ddot{\theta} + 6 \frac{k'l}{2m+6M} \dot{\theta}^2 + \frac{3m+6M}{2m+6M} \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{6\alpha}{(2m+6M)l^2} \sin(\omega t) \quad \text{si } R_e > 1000-2000$$